

Fachschaft: Mathematik

Schulinternes Curriculum für die Sekundarstufe II
Stand 11.2025

Inhaltsverzeichnis

1. Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit	3
1.1 Fachliche Bezüge zu den Rahmenbedingungen des schulischen Umfelds	3
1.2 Die Fachgruppe Mathematik	3
1.3 Fachliche Bezüge zu schulischen Standards zum Lehren und Lernen.....	4
2. Entscheidungen zum Unterricht	5
2.1 Unterrichtsvorhaben	5
2.2 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben.....	5
2.2.1 Unterrichtsvorhaben in der EF	6
Abfolge der Unterrichtsvorhaben	6
Konkretisierte Unterrichtsvorhaben	6
2.2.2 Unterrichtsvorhaben in der Qualifikationsphase im Grundkurs	22
Abfolge der Unterrichtsvorhaben	22
Konkretisierte Unterrichtsvorhaben	22
2.2.3 Unterrichtsvorhaben in der Qualifikationsphase im Leistungskurs	38
Abfolge der Unterrichtsvorhaben	38
Konkretisierte Unterrichtsvorhaben	38
3. Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung.....	62
3.1 Beurteilungsbereich „Klausuren“	62
3.1.1 Gestaltung der Klausuren	62
3.1.2 Anzahl und Dauer der Klausuren	63
3.2 Beurteilungsbereich „sonstige Mitarbeit“	64
3.2.1 Beurteilungsaspekte.....	64
3.2.2 Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen.....	65
3.2.3 Qualitätssicherung	67
4. Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit	68
5. Lehr- und Lernmittel	70
6. Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans	71
7. Bezug zum Medienkompetenzrahmen NRW	72

1. Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

1.1 Fachliche Bezüge zu den Rahmenbedingungen des schulischen Umfelds

Das BVA ist ein vierzügiges Gymnasium mit erweiterten Bildungsangeboten, an dem zurzeit 800 - 900 Schülerinnen und Schüler von 62 Lehrpersonen unterrichtet werden. Es liegt im inneren Bereich Dormagens. Über zahlreiche Kooperationen ist die Schule mit Einrichtungen Dormagens verbunden, z.B. dem Archiv des Rhein-Kreises Neuss. Große Firmen wie Bayer Dormagen, Lanxess, Currenta, Covestro oder der Chempark unterstützen uns auf vielfältige Weise, aber auch mit kleineren Betrieben sind wir – z.B. über die Betriebspraktika oder unsere Zukunftsmesse – verbunden. Fachliteratur kann zusätzlich in der Stadtbibliothek von Dormagen ausgeliehen werden, welche fußläufig in etwa 20 Minuten zu erreichen ist. Weiterhin kooperiert unser Gymnasium im Oberstufenbereich mit den umliegenden weiterführenden Schulen. Insbesondere mit der Bertha-von-Suttner-Gesamtschule. Im Fach Mathematik kommt es i.d.R. nicht zu schulübergreifenden Kursen. Dennoch knüpfen die Schülerinnen und Schüler durch diese Zusammenarbeit Kontakte (in anderen schulübergreifenden Kursen) aus denen sich Lerngruppen für das Fach Mathematik ergeben. In unserem Schulprogramm ist als wesentliches Ziel der Schule beschrieben, die Lernenden als Individuen mit jeweils besonderen Fähigkeiten, Stärken und Interessen in den Blick zu nehmen. Es ist ein wichtiges Anliegen, durch gezielte Unterstützung des Lernens die Potenziale jeder Schülerin und jedes Schülers in allen Bereichen optimal zu entwickeln. Um dieses Ziel zu erreichen, ist eine gemeinsame Vorgehensweise aller Fächer erforderlich. In einem längerfristigen Entwicklungsprozess arbeitet die Schule daran, die Bedingungen für erfolgreiches und individuelles Lernen zu verbessern. In den Vertiefungskursen der Jahrgangsstufe EF erhalten sie die Hilfestellung, die sie benötigen. Es ist eine Unterstützung, die sich an den jeweiligen Unterrichtsinhalten orientiert. So wollen wir Lernerfolg sicherstellen. Durch eine verstärkte Zusammenarbeit und Koordinierung der Fachbereiche werden Bezüge zwischen Inhalten verschiedener Fächer hergestellt.

1.2 Die Fachgruppe Mathematik

Die Fachgruppe Mathematik umfasst derzeit 15 Lehrkräfte. Der Unterricht ist darauf abgestimmt, dass den Schülerinnen und Schülern das Durchlaufen der Oberstufe unseres Gymnasiums gut gelingen kann. Mit der nahegelegenen Sekundarschule sowie der Gesamtschule sind Konzepte für den Übergang in unsere Oberstufe vereinbart worden.

Die Fachkonferenz tritt mindestens einmal pro Schulhalbjahr zusammen, um notwendige Absprachen zu treffen. In der Regel nehmen auch ein Mitglied der Elternpflegschaft sowie die gewählte Schülervertretung beratend an den Sitzungen teil.

Zusätzlich treffen sich die Kolleginnen und Kollegen innerhalb jeder Jahrgangsstufe zu weiteren Absprachen regelmäßig. Dieses Vorhaben wird durch die Schulleitung unterstützt. Um die Lehrkräfte bei der Unterrichtsplanung zu unterstützen, werden eigene ausgearbeitete Unterrichtsreihen und Materialien, die zu früheren Unterrichtsprojekten angefertigt und gesammelt worden sind, sowie Materialien von Schulbuchverlagen an bekannter zentraler Stelle bereitgestellt, wenn möglich in digitaler Form. Diese werden im Rahmen der Unterrichtsentwicklung laufend ergänzt, überarbeitet und weiterentwickelt.

#

1.3 Fachliche Bezüge zu schulischen Standards zum Lehren und Lernen

Der Unterricht findet wie am BVA üblich im 67,5 Minuten-Rhythmus (Langstunde) statt. Eine Ausnahme bildet der Leistungskurs. Hier dauert eine Unterrichtseinheit 90 Minuten.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet. Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme am Bundeswettbewerb der Mathematik und ähnlichen Wettbewerben motiviert.

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass, wo immer möglich, mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden. Für die Sekundarstufe II gibt es dazu verbindliche Absprachen mit anderen Fachgruppen (bspw. exponentielles Wachstum bei Bakterienkulturen im Fach Biologie oder trigonometrische Funktionen mit der Fachgruppe Physik).

In der Sekundarstufe II wird ein MMS-System (GeoGebra) in der Jahrgangsstufe EF eingeführt und fortlaufend verwendet. Die Formelsammlung und das MMS-System werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Am Bettina-von-Arnim-Gymnasium stehen insgesamt zwei vollständig ausgestattete Computerräume zur Verfügung. Außerdem verfügt die gesamte Oberstufe des BVA flächendeckend über iPads, sodass der Mathematikunterricht völlig problemlos digital gestützt/gestaltet werden kann. Die mittlerweile in allen Klassenräumen installierten Smartboards bieten dafür uneingeschränkte Kompatibilität.

2. Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

In der nachfolgenden *Übersicht über die Unterrichtsvorhaben* wird die für alle Lehrerinnen und Lehrer gemäß Fachkonferenzbeschluss verbindliche Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Die Übersicht dient dazu, für die einzelnen Jahrgangsstufen allen am Bildungsprozess Beteiligten einen schnellen Überblick über Themen bzw. Fragestellungen der Unterrichtsvorhaben unter Angabe besonderer Schwerpunkte in den Inhalten und in der Kompetenzentwicklung zu verschaffen. Dadurch soll verdeutlicht werden, welches Wissen und welche Fähigkeiten in den jeweiligen Unterrichtsvorhaben besonders gut zu erlernen sind und welche Aspekte deshalb im Unterricht hervorgehoben thematisiert werden sollten. Unter den Hinweisen des Übersichtsrasters werden u.a. Möglichkeiten im Hinblick auf inhaltliche Fokussierungen und interne Verknüpfungen sowie Möglichkeiten der Vertiefung ausgewiesen. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Der schulinterne Lehrplan ist so gestaltet, dass er zusätzlichen Spielraum für Vertiefungen, besondere Schülerinteressen, aktuelle Themen bzw. die Erfordernisse anderer besonderer Ereignisse (z.B. Praktika, Kursfahrten o.Ä.) belässt. Abweichungen über die notwendigen Absprachen hinaus sind im Rahmen des pädagogischen Gestaltungsspielraumes der Lehrkräfte möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden.

2.2 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Die in den Tabellen aufgeführten inhaltlichen Schwerpunkte und Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung sind dem KLP für das Gymnasium SII Mathematik entnommen. Diese Darstellungsweise unterstützt den Prozess, die Ziele des KLP vollständig zu erreichen. Längere Auslassungen wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit durch [...] gekennzeichnet.

Markierungen zu übergeordneten Kompetenzen entsprechend unseres Leitbilds

- ★ Zukunftsorientierung und Innovation
- ★ Gesundheit und Prävention
- ★ Selbstständigkeit und Wissbegierde
- ★ Kommunikationskultur und Kooperation
- ★ Kreativität und Ästhetik
- ★ Vielfalt und Weltoffenheit

2.2.1 Unterrichtsvorhaben in der EF

Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase

E-A1: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen und Einfluss von Parametern/Transformationen

E-A2: Eigenschaften ganzzahliger Funktionen

E-A3: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate

E-A4: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen

E-G1: Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen

E-G2: Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Eingeführt ist das Lehrwerk Lambacher Schweizer Einführungsphase vom Klett-Verlag. Das Buch steht den Schülerinnen und Schülern als E-Book zur Verfügung. Es bildet die Basis für die unterrichtliche Arbeit und wird an geeigneter Stelle durch zusätzliche Materialien (z.B. aus dem zugehörigen Serviceband oder dem Arbeitsheft) ergänzt. Weitere Materialien sind in den einzelnen Unterrichtsvorhaben genannt.

Einführungsphase

Unterrichtsvorhaben E-A1: Funktionen – Neues und Bekanntes

(Zeitbedarf: ca. 14 Langstunden)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Lineare und quadratische Funktionen, Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, trigonometrische Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten
- lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.
- erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion).
- wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (Potenzfunktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-(1)** wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- **Ope-(3)** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- **Ope-(5)** führen Darstellungswechsel sicher aus,
- **Ope-(6)** führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- **Ope-(7)** nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- **Ope-(11)** nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- **Ope-(12)** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- **Pro-(1)** stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- **Pro-(4)** erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- **Pro-(7)** setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- **Pro-(10)** überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- **Pro-(11)** analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
- **Pro-(12)** vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

- **Arg-(2)** unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
- **Arg-(3)** präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- **Arg-(13)** überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- **Kom-(3)** erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- **Kom-(5)** formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- **Kom-(6)** verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- **Kom-(7)** wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- **Kom-(8)** wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- **Kom-(10)** konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- **Kom-(11)** greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten werden mithilfe von GeoGebra (MMS) untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitions- und Wertebereich, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und erklärt. Die Kompetenzen im Bereich der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Die Transformationen (Verschiebung und Streckung jeweils in Richtung beider Achsen) werden anknüpfend an eine Systematisierung und ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform) auf die Sinusfunktion und auf Potenzfunktionen übertragen. Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet. Erweitert wird das Thema der Transformationen noch um die Spiegelungen an den Koordinatenachsen.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.

Leitbild: ★ ★

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele in den Blick zu nehmen. Hier z.B. Gesundheit und Wohlergehen, sowie Maßnahmen zum Klimaschutz (Aufgaben zu medizinischen und klimabezogenen Themen finden sich im eingeführten Lehrwerk).

Unterrichtsvorhaben E-A2: Ganzrationale Funktionen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

(Zeitbedarf: ca. 10 Langstunden)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen.
- lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.
- wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-(11)** nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- **Ope-(12)** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- **Mod-(1)** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- **Mod-(2)** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- **Mod-(3)** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- **Mod-(5)** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- **Arg-(1)** stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- **Arg-(2)** unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
- **Arg-(3)** präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- **Arg-(13)** überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- **Kom-(1)** erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen auszunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen

- Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
- **Kom-(7)** wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
 - **Kom-(8)** wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und (lokale) Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und anschaulich diskutiert. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechentechniken der SI ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Bei Transformationen ganzrationaler Funktionen werden die Auswirkungen auf die im vorherigen Unterrichtsvorhaben betrachteten Eigenschaften sowie auf Extrempunkte untersucht. Für algebraische Operationen und graphische Darstellungen wird in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend ein MMS verwendet.

Unterrichtsvorhaben E-A3: Ableitung

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

(Zeitbedarf: ca. 12 Langstunden)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
- erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Limes-Schreibweise,
- deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
- bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),

- leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen, nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-(2)** übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- **Ope-(3)** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- **Ope-(4)** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- **Ope-(5)** führen Darstellungswechsel sicher aus,
- **Ope-(11)** nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- **Ope-(12)** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, eigenständigen Kontrollieren ihrer Lösungen, visualisieren algebraischer Probleme
- **Mod-(5)** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- **Mod-(6)** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- **Pro-(2)** analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- **Pro-(3)** wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- **Pro-(4)** erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- **Pro-(7)** setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- **Arg-(3)** präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- **Arg-(4)** erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- **Arg-(5)** begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze so- wie sachlogische Argumente,
- **Arg-(9)** erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- **Arg-(12)** beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit
- **Arg-(13)** überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- **Kom-(2)** beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- **Kom-(3)** erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- **Kom-(4)** erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- **Kom-(6)** verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- **Kom-(8)** wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil,...) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall-, Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen sollen auch Steigungen und Steigungswinkel in realen Sachkontexten (z.B. Brückenbögen, Gebäudeteile, Trassenführungen, Seilbahnen) betrachtet werden.

Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vor- stellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät (z.B. mithilfe eines Lasers) ermittelten Geschwindigkeit genutzt.

Ein MMS wird zur numerischen und graphischen Darstellung des Grenzüberganges von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) ein- gesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den in der SI aufgebauten Vorstellungen problematisiert und analytisch definiert.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Ver- muten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limeschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.

Um die Ableitungsregel für (höhere) natürliche Potenzen zu vermuten, nutzen die Schüle- rinnen und Schüler ein MMS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert hier besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens.

Anhand von innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.

Leitbild: ★ ★

Europa: Im Kontext Änderungsraten bieten sich Anknüpfungspunkte zu einem vernetzenden Blick auf wissenschaftliches Arbeiten im Sinne der europäischen Werte. Aufgaben zur Beobachtung von Bakterienkulturen und Photosynthese finden sich im eingeführten Lehrwerk.

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele in den Blick zu nehmen. Hier z.B. das Leben im Wasser und an Land (vgl. Europabezug oben).

Unterrichtsvorhaben E-A4: Untersuchung von Funktionen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

(**Zeitbedarf:** ca. 14 Langstunden)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Differentialrechnung: Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,
- unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
- beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
- nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-(1)** wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- **Ope-(2)** übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- **Ope-(4)** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- **Ope-(5)** führen Darstellungswechsel sicher aus,
- **Ope-(7)** nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- **Ope-(9)** verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- **Ope-(11)** nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- **Ope-(12)** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...

- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- **Ope-(13)** entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- **Mod-(3)** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- **Mod-(4)** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- **Mod-(5)** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- **Mod-(6)** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- **Mod-(8)** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- **Mod-(9)** verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- **Pro-(4)** erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- **Pro-(5)** nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- **Pro-(6)** wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- **Pro-(8)** berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- **Pro-(9)** entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- **Pro-(10)** überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- **Pro-(12)** vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- **Pro-(13)** benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- **Arg-(1)** stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- **Arg-(4)** erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- **Arg-(5)** begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- **Arg-(6)** entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- **Arg-(8)** verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- **Arg-(9)** erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische

Beweise,

- **Arg-(10)** beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
- **Arg-(11)** ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
- **Arg-(12)** beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
- **Kom-(5)** formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- **Kom-(7)** wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- **Kom-(9)** dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
- **Kom-(12)** nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- **Kom-(13)** vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Die Beschäftigung mit ganzrationalen Funktionen vom Grad größer gleich drei erfordert auf der rechnerischen Ebene die Anwendung der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der beiden Graphen, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und den Nullstellen ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der möglichen Fälle bezogen auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung vertieft untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.

Ausgehend von graphischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

Leitbild: ★★

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele in den Blick zu nehmen.

Unterrichtsvorhaben E-G1: Vektoren

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

(**Zeitbedarf:** ca. 6 Langstunden)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
- deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
- berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
- addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
- weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-(3)** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- **Ope-(4)** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- **Ope-(8)** erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- **Ope-(11)** nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- **Ope-(12)** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum
 - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
- **Mod-(1)** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- **Mod-(2)** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- **Pro-(2)** analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- **Pro-(3)** wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- **Arg-(5)** begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze so- wie sachlogische Argumente,
- **Kom-(4)** erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- **Kom-(6)** verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

- **Kom-(7)** wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, verbal-sprachlich) aus,
- **Kom-(8)** wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z.B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung). An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schülerinnen und Schüler die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen ein MMS, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. Verkettungen von Verschiebungen führen graphisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Kanten) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Vernetzung:

- Physik: Kräfte und ihre Addition

Unterrichtsvorhaben E-G2: Geraden im Raum

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

(Zeitbedarf: ca. 10 Langstunden)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
- weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach,
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-(1)** wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- **Ope-(6)** führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- **Ope-(8)** erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- **Mod-(2)** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- **Mod-(3)** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- **Mod-(5)** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- **Mod-(8)** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- **Pro-(6)** wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- **Pro-(7)** setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- **Pro-(8)** berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- **Pro-(9)** entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- **Pro-(10)** überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

- **Pro-(12)** vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- **Arg-(4)** erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- **Arg-(6)** entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- **Arg-(7)** nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- **Arg-(8)** verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- **Kom-(2)** beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- **Kom-(3)** erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- **Kom-(10)** konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- **Kom-(11)** greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
- **Kom-(12)** nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Zunächst wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z.B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier

durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3×2 -Gleichungssystem.

Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die SuS herstellen,

wenn sie zugleich die auf eine Landkarte reduzierte Situation mit nur zwei Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird ein MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gauß-Algorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei den Steckbriefaufgaben eingeführt und geübt.

Summe Einführungsphase: 80 Langstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 66 Langstunden

2.2.2 Unterrichtsvorhaben in der Qualifikationsphase im Grundkurs

Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Qualifikationsphase Grundkurs

Q GK-A1: Fortsetzung der Differenzialrechnung

Q GK-A2: Integralrechnung

Q GK-A3: Exponentialfunktionen

Q GK-A4: Weitere Funktionen

Q GK-G1: Vektoren, Geraden und Winkel

Q GK-G2: Ebenen

Q GK-S1: Statistik und Wahrscheinlichkeit

Q GK-S2: Binomialverteilung

Q GK-S3: Stochastik

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Eingeführt ist das Lehrwerk Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs vom Klett-Verlag. Das Buch steht den Schülerinnen und Schülern als E-Book zur Verfügung. Es bildet die Basis für die unterrichtliche Arbeit und wird an geeigneter Stelle durch zusätzliche Materialien (z.B. aus dem zugehörigen Serviceband oder dem Arbeitsheft) ergänzt. Weitere Materialien sind in den einzelnen Unterrichtsvorhaben genannt.

Qualifikationsphase Grundkurs Q1

Unterrichtsvorhaben Q GK-A1: Fortsetzung der Differenzialrechnung
(**Zeitbedarf:** ca. 17 Langstunden)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“),
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, (...) sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben

- erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen (...) sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ (...)
- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen (...)

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern
- **Ope-13** entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
- **Mod-9** verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung

Umsetzung:

Gestartet wird mit Optimierungsproblemen mit ganzrationalen Funktionen. Als Einstiegsproblem hat sich die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der

Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden.

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. .

Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Materialhinweis:

Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Leitbild: ★★

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele in den Blick zu nehmen. Die Förderungen von Maßnahmen zum Klimaschutz kann mittels des Materialhinweises (s.o.) bearbeitet werden. Weiterhin steht die Nachhaltigkeit bei den Optimierungsaufgaben im Vordergrund. Insbesondere wenn es um größtmögliche Verpackungsinhalte bei möglichst geringem Materialeinsatz o.a. geht.

Unterrichtsvorhaben QGK-A2: Integralrechnung (Zeitbedarf: ca. 16 Langstunden)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung
- interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung

- skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion
- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
- erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und wenden ihn an
- nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
- nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-3** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells

Umsetzung:

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).

Der Einstieg kann über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untersumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen.

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Materialhinweis:

Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (siehe Teams) entnommen werden.

Leitbild: 

Unterrichtsvorhaben QGK-A3: Exponentialfunktionen (Zeitbedarf: ca. 13 Langstunden)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, (...), der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von (...) der natürlichen Exponentialfunktion (...)
- wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an
- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$) verwenden

- Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern
- **Ope-13** entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
- **Mod-9** verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung
- **Pro-4** erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer wiederholenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand.

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation

(Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator
(<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Leitbild: ★ ★

Europa: Exponentialfunktionen lassen sich anhand europaweiter Wachstumsprozesse – etwa Bevölkerungsentwicklung, Energieverbrauch oder Infektionsdynamiken in verschiedenen EU-Ländern – modellieren, wodurch Internationalität und gemeinsame europäische Herausforderungen sichtbar werden.

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von Exponentialfunktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele in den Blick zu nehmen. Die Förderungen von Maßnahmen zum Klimaschutz kann anknüpfend an Unterrichtsvorhaben QGK-A1 mittels des Materialhinweises (s.o.) bearbeitet werden.

Unterrichtsvorhaben QGK-A4: Weitere Funktionen

(Zeitbedarf: ca. 15 Langstunden)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von (...) der Sinus- und Kosinusfunktion, sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an
- wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an

- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung
- nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematikssystem (MMS) zum zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Pro-5** nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern)

Umsetzung:

In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produktregel und Spezialfall der Kettenregel für Verknüpfungen von Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen) hergeleitet. Dazu können zunächst Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Vorgelegte Argumentationsketten werden erläutert, beurteilt und für den Beweis der Produktregel genutzt. Die Kettenregel für Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen im Exponenten kann graphisch mithilfe der bekannten Zusammenhänge beim Transformieren von Funktionsgraphen entdeckt werden.

Mithilfe der neu gewonnen Ableitungsregeln werden schließlich in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen betrachtet und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet. Dabei ist es mithilfe eines MMS oder mithilfe von vorgegebenen Ableitungen auch möglich, weitere Verkettungen von ganzrationalen Funktionen mit Exponentialfunktionen zu betrachten. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Zuletzt werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft. Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs...), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. Integrale von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen

und daraus zusammengesetzten Funktionen können in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet werden.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden.

Leitbild:



BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von zusammengesetzten Funktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele (z.B. dem Leben im Wasser und an Land) in den Blick zu nehmen. Geeignete Aufgaben beispielsweise zur Konzentration von giftigem PFT finden sich im eingeführten Lehrwerk.

Unterrichtsvorhaben QGK-G1: *Vektoren, Geraden und Winkel*

(**Zeitbedarf:** ca. 10 Langstunden)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-1** wenden grundlegende Kopfrechen-fertigkeiten sicher an
- **Ope-3** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-5** führen Darstellungswechsel sicher aus
- **Ope-8** erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven
- **Ope-11** nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Darstellen geometrischer Situationen im Raum
- **Pro-7** setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Summe Grundkurs Q1: 80 Langstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 71 Langstunden

Qualifikationsphase

Grundkurs Q2

Unterrichtsvorhaben QGK-G2: Ebenen

(**Zeitbedarf:** ca. 14 Langstunden)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar
- verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor)
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen
- erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
- nutzen Symmetriebetrachtungen in geometrischen Objekten zur Lösung von Problemstellungen und spiegeln Punkte an Ebenen in einfachen Fällen
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-5** führen Darstellungswechsel sicher aus
- **Ope-8** erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern
 - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.
- **Pro-7** setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
- **Pro-8** berücksichtigen einschränkende Bedingungen

- **Pro-9** entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus.

Umsetzung:

Die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ wird anknüpfend an Geradengleichungen $a \cdot x + b \cdot y = d$ in der Ebene durch Erweitern um eine Variable eingeführt. Zur Erkundung soll eine Visualisierung mit einem MMS dienen, bei der die Achsenabschnitte $a_i = d/n_i$ (für $n_i \neq 0$) ins Spiel kommen, die in der Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ auftreten. Diese Form bietet den Vorteil, eindeutig zu sein, und erlaubt es, die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darzustellen.

Die Schnittpunktberechnung (Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Gerade (parametrisierte Punktmenge) in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Achsenabschnittsberechnung ordnet sich dabei als Spezialfall ein. Auch Spurgeraden in den Hauptebenen werden mit dem Einsetzungsprinzip ermittelt.

Die Notation mithilfe des in GK-G1 eingeführten Skalarproduktes $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ führt zur Deutung von $\vec{n}$ als Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Der Einfluss von d , mit dem sich die Ebene parallel verschieben lässt, wird erkundet. Um eine Gleichung einer Ebene aus drei Punkten aufzustellen, soll dies dem Prinzip einer Steckbriefaufgabe folgend (vgl. GK-A2) mit einem 3x3-Gleichungssystem durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ erfolgen, wobei d als Parameter im MMS mitläuft oder $d = 1$ (in Sonderfällen $d = 0$) gesetzt werden kann.

Als Kontext für die anschließend zu thematisierende Parameterform einer Ebene dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Der Übergang zur Koordinatenform erfolgt als Alternative zum „Steckbriefverfahren“ auch durch die Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe eines unterbestimmten 2x3-Gleichungssystems. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform soll aber nur im Rahmen einer Differenzierung erfolgen.

Der umgekehrte Übergang von der Koordinatenform zur Parameterform kann über drei Punkte (z.B. die Achsenabschnitte) bewerkstelligt werden, oder indem zwei (zu $\vec{n}$ orthogonale) Spannvektoren der Ebene aus Gleichungen des Typs $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gewonnen werden.

Geometrische Körper wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen, können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere die Grundebenen, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) werfen die Frage auf, wie sich Spiegelungen an Ebenen durchführen lassen. In einfachen Fällen, in denen der Normalenvektor in Richtung einer Koordinatenachse weist, werden die Koordinaten eines an der Ebene gespiegelten Punktes ermittelt. Der Nachweis der Symmetrie zu einer gegebenen Ebene wird durch einen Vergleich des Normalenvektors mit dem Verbindungsvektor zwischen Punkt und Spiegelpunkt geführt, wobei zusätzlich eine Punktprobe nötig ist, um zu zeigen, dass der Mittelpunkt in der Ebene liegt.

Winkel lassen sich zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmen. Speziell

die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Vernetzung:

- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder auf.

Vertiefung:

Die Bestimmung von Winkeln zwischen Geraden und Ebenen oder zwei Ebenen lässt Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung zu. Dadurch lässt sich ein im Unterrichtsvorhaben E-G2 begonnenes Thema ausbauen.

Leitbild: ★

Europa: Die Untersuchung geometrischer Objekte im Raum bietet von internationalen architektonischen Meisterwerken bis zu liegenden Werbetaepichen (Cam Carpets) im europäischen Fußball viele Anknüpfungspunkte. Aufgaben dazu finden sich im eingeführten Lehrwerk.

Unterrichtsvorhaben QGK-S1: Statistik und Wahrscheinlichkeit

(Zeitbedarf: ca. 20 Langstunden)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
- verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
- bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
- lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-1** wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an
- **Ope-2** übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt
- **Ope-3** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen

Verständnisses durch

- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-5** führen Darstellungswechsel sicher aus
- **Ope-10** recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit

Umsetzung:

Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvergängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten

Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die

Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensiblen Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu

den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Leitbild: ★ ★

Europa: Der europäische Wert Vielfalt sollte bei diesem Unterrichtsvorhaben besondere Berücksichtigung finden, da Dichotomien in stochastischen Modellierungen diesem Wert entgegenstehen können. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

BNE: Die Ziele Gesundheit und Wohlergehen (anhand der Wirkung von Medikamenten) und Geschlechtergleichheit (Zusammenhänge bestimmter Merkmale mit dem Geschlecht) werden durch vielfältige Aufgaben in den Blick genommen.

Unterrichtsvorhaben QGK-S2: Binomialverteilung
(Zeitbedarf: ca. 14 Langstunden)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können
- erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung
- nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen
- interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten (...) Zufallsgrößen
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu

- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
- **Arg-5** begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente
- **Arg-6** entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- **Arg-7** nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- **Arg-8** verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen

Umsetzung:

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementäreignissen möglich.

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter

k, p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit wird bewusst als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit interpretiert. Die Genauigkeit dieser Schätzung steigt mit dem Stichprobenumfang.

Vertiefung:

In einem Sachkontext wird das Konzept der σ -Umgebungen exemplarisch behandelt.

Leitbild: ★ ★

Summe Grundkurs Q2: 60 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 48 Langstunden

2.2.3 Unterrichtsvorhaben in der Qualifikationsphase im Leistungskurs

Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Qualifikationsphase Leistungskurs

Q-A1: Fortsetzung der Differenzialrechnung

Q-A2: Integralrechnung

Q-A3: Exponentialfunktionen

Q-A4: Weitere Funktionen

Q-G1: Vektoren, Geraden und Winkel

Q-G2: Ebenen

Q-G3: Lagebeziehungen und Abstandsberechnungen

Q-S1: Statistik und Wahrscheinlichkeit

Q-S2: Binomialverteilung

Q-S3: Stochastik

Q-S4: Prognoseintervalle – Konfidenzintervalle – Normalverteilung

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Eingeführt ist das Lehrwerk Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs vom Klett-Verlag. Das Buch steht den Schülerinnen und Schülern als E-Book zur Verfügung. Es bildet die Basis für die unterrichtliche Arbeit und wird an geeigneter Stelle durch zusätzliche Materialien (z.B. aus dem zugehörigen Serviceband oder dem Arbeitsheft) ergänzt. Weitere Materialien sind in den einzelnen Unterrichtsvorhaben genannt.

Qualifikationsphase

Leistungskurs Q1

Hinweis: Eine LK-Stunde dauert 90 Minuten

Unterrichtsvorhaben QLK-A1: Fortsetzung der Differenzialrechnung
(Zeitbedarf: ca. 15 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“),
- Fortführung der Differenzialrechnung: Funktionenscharen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel
- führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, (...) sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen (...) sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ (...)
- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung
- deuten Ableitungen mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen (...)

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern
- **Ope-13** entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung

- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
- **Mod-9** verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung

Umsetzung:

Zur Reaktivierung der Vorkenntnisse der Differentialrechnung werden Funktionen vierten Grades untersucht. Dies umfasst insbesondere das hilfsmittelfreie Lösen von biquadratischen Gleichungen.

Anschließend werden zunächst Optimierungsprobleme mit ganzrationalen Funktionen ohne Parameter betrachtet. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (noch ohne die Produkt- oder Kettenregel). Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden, ohne dass Ableitungen hilfsmittelfrei gebildet werden müssen (z.B. „Zylinder in einer Kugel“).

Anschließend werden Optimierungsprobleme bei Funktionen mit Parametern betrachtet. Hier kann z.B. auch das Problem der offenen Schachtel wieder aufgegriffen werden, indem nicht von einem Papier mit festen Maßen ausgegangen wird, sondern nur ein Seitenverhältnis der Papierseiten vorgegeben wird oder die Länge einer Seite offenbleibt, sodass bei der Zielfunktion eine Parameterabhängigkeit entsteht.

Mit vorgegebenen ganzrationalen Funktionen mit Parametern (Funktionsscharen) werden anknüpfend innermathematische Situationen (Funktionsscharen) und anwendungsbezogene Kontexte mit Parametern (z.B. Brücken, Gebäude, Flugbahnen) untersucht, bei denen Extrempunkte eine Rolle spielen. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt. Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrie, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die

Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen.

Die Umkehrbarkeit von Funktionen wird ausgehend von graphischen Darstellungen und jeweils variierenden Definitionsbereichen am Beispiel von Potenz- und Wurfelfunktionen sowie Transformationen von diesen thematisiert. In einfachen Fällen werden Funktionsterme von Umkehrfunktionen dabei hilfsmittelfrei ermittelt. Der Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion wird unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich als Symmetrie zur Winkelhalbierenden erkannt.

Hinweise:

- Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig zur Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen.

Materialhinweis:

Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Leitbild: ★★

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele in den Blick zu nehmen. Die Förderungen von Maßnahmen zum Klimaschutz kann mittels des Materialhinweises (s.o.) bearbeitet werden.

Unterrichtsvorhaben QLK-A2: Integralrechnung
(Zeitbedarf: ca. 18 LK-Stunden)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung
- interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung

- skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion
- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
- begründen den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an
- nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
- nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-3** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells

Umsetzung:

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Rekonstruktion einer Größe (z.B. physikalische Arbeit) thematisiert, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt.

Der Einstieg sollte über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsummen) zur möglichst genauen näherungsweise Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die

entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit werden immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit dem Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Aus den übereinstimmenden Grenzwerten von Ober- und Untersummen ergibt sich die Definition des Integrals.

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird anschaulich, kontextgebunden und numerisch begründet.

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch tiefergehend zu begründen, wird der absolute Zuwachs $I_a(x+h) - I_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In diesem Rahmen werden auch die Intervalladditivität und Linearität des Integrals formal gefasst.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen für Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. Dabei finden sie auch heraus, dass dies nicht in jedem Fall möglich ist und es Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ gibt, für deren Stammfunktionen noch kein Funktionsterm zur Verfügung steht.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden für die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen genutzt und auf weitere zunehmend komplexe innermathematische und anwendungsorientierte Situationen übertragen. Geeignete Problemstellungen werden auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Anhand der Volumina von Körpern (einfache geometrische Grundkörper, Gefäße, Zeppelin, ...), die sich durch Rotation eines Graphen um die x-Achse beschreiben lassen, werden verschiedene Aspekte der Differential- und Integralrechnung vernetzt und vertieft:

- Aufstellen der Randfunktion mit Definitionsbereich (Vernetzung mit Steckbriefaufgaben)
- Integralvorstellung (Kreisscheiben, Grenzwertprozess)
- Nachweis / Bildung von Stammfunktionen
- Berechnung von bestimmten Integralen

Materialhinweis:

Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (siehe Teams) entnommen werden.

Unterrichtsvorhaben QLK-A3: Exponentialfunktionen

(**Zeitbedarf:** ca. 13 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, (...), der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von (...) Exponentialfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion (...)
- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$)
- verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung
- untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitionsbereich und Wertebereich
- erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen (...)

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern
- **Ope-13** entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle

- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
- **Mod-9** verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung
- **Pro-4** erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS kann das Verhalten des Differenzenquotienten für immer kleinere h betrachtet werden. Durch Variation der Stelle der Ableitung entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand (Differentialgleichung).

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse und Wachstumsprozesse mit Parametern (Funktionsscharen) betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und die Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator
(<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Leitbild: ★ ★

Europa: Exponentialfunktionen lassen sich anhand europaweiter Wachstumsprozesse – etwa Bevölkerungsentwicklung, Energieverbrauch oder Infektionsdynamiken in

verschiedenen EU-Ländern – modellieren, wodurch Internationalität und gemeinsame europäische Herausforderungen sichtbar werden.

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von Exponentialfunktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele in den Blick zu nehmen. Die Förderungen von Maßnahmen zum Klimaschutz kann anknüpfend an Unterrichtsvorhaben QGK-A1 mittels des Materialhinweises (s.o.) bearbeitet werden.

Unterrichtsvorhaben QLK-A4: Weitere Funktionen

(Zeitbedarf: ca. 13 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Funktionen: Sinusfunktionen der Form $f(x)=a \sin(bx+c)+d$ und entsprechende Kosinusfunktion
- Fortführung der Differenzialrechnung: Kettenregel, Funktionsscharen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von (...) der Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten an
- nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-system (MMS) zum zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Pro-5** nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern)

Umsetzung:

In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) hergeleitet. Die Vorstellung des Ableitens als lokale lineare Approximation wird dabei mithilfe eines MMS aufgegriffen. Die Ableitungsregeln können zunächst als Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen bzw. für einfache Verkettungen (z.B. Potenz einer ganzrationalen Funktion) aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Mindestens eine der neuen Ableitungsregeln soll bewiesen werden. An dieser Stelle sind Differenzierungen z.B. durch Einsatz eines Beweispuzzles oder Beurteilungen von vorgelegten Argumentationsketten möglich.

Mithilfe der neu gewonnenen Ableitungsregeln werden schließlich zusammengesetzte Funktionen (auch mit Exponentialfunktionen und Sinus- / Kosinusfunktionen) untersucht und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben eingesetzt. Dabei werden auch Funktionsscharen betrachtet. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Zuletzt werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Es werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs...), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. In geeigneten Kontexten werden uneigentliche Integrale als Grenzwert der jeweils zugehörigen Integralfunktion eingeführt und bestimmt.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) betrachtet, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen mit anderen Funktionen verknüpft werden. Integrale von zusammengesetzten Funktionen, Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen werden in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet.

Vertiefung:

- Bei der Betrachtung von Rotationskörpern bieten Hohlkörper und der Torus (z.B. Fahrradschlauch) einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Vernetzung:

Kenntnisse über uneigentliche Integrale ermöglichen ein vertieftes Verständnis der Normalverteilung und ihrer Verteilungsfunktion.

Hinweis:

Die lineare Approximation stellt eine Möglichkeit dar, die Beweise der Ableitungsregeln fachlich korrekt und einsichtig zu notieren.

Leitbild: ★ ★

BNE: Anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von zusammengesetzten Funktionen bieten sich in besonderem Maße an, um die Nachhaltigkeitsziele (z.B. dem Leben im Wasser und an Land) in den Blick zu nehmen. Geeignete Aufgaben beispielsweise zur Konzentration von giftigem PFT finden sich im eingeführten Lehrwerk.

Unterrichtsvorhaben QLK-G1: Vektoren, Geraden und Winkel

(**Zeitbedarf:** ca. 7 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt
- Schnittwinkel: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-1** wenden grundlegende Kopfrechen-fertigkeiten sicher an
- **Ope-3** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-5** führen Darstellungswechsel sicher aus
- **Ope-8** erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven
- **Ope-11** nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Darstellen geometrischer Situationen im Raum
- **Pro-7** setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung zunächst eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont, der später zum Verständnis der Abstandsmessung zwischen Punkten und Ebenen genutzt werden kann.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Am Beispiel der physikalischen Arbeit wird das geometrische Verständnis des Skalarprodukts veranschaulicht.

Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die besonderen formalen Eigenschaften des Skalarprodukts sowie die dafür gültigen Rechengesetze werden im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. keine Division durch einen Vektor, kein Satz vom Nullprodukt) sowie vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen thematisiert.

Vertiefung:

- Im Rahmen eines arbeitsteiligen Vorgehens kann ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt dahinterliegende elementargeometrische Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms. Ein ähnliches Vorgehen ist beim Beweis des Satzes des Thales möglich.

Im Sinne der Wissenschaftspropädeutik ist neben einem Einblick in die Möglichkeit einer axiomatischen Festlegung eines Skalarproduktes durch seine algebraischen Eigenschaften wichtig, dass durch ein Skalarprodukt zugleich Längen- als auch Winkelmessung in einem Vektorraum ermöglicht werden.

Unterrichtsvorhaben QLK-G2: Ebenen

(Zeitbedarf: ca. 12 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen
- erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-5** führen Darstellungswechsel sicher aus
- **Ope-8** erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern
 - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung

- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.
- **Pro-7** setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
- **Pro-8** berücksichtigen einschränkende Bedingungen
- **Pro-9** entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus.

Umsetzung:

Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an das Unterrichtsvorhaben LK-G1 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die als Punkt-Normalenform bekannte Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen wie $\vec{a} = \vec{0}$ wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die Schnittmenge zweier Ebenen wird durch Lösung eines linearen 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Dabei müssen die Lernenden eine nicht leere Lösungsmenge selbständig parametrisieren und als Schnittgerade identifizieren.

Zur Klärung der Parallelität von Geraden und Ebenen oder Ebenen untereinander werden Normalenvektoren herangezogen. Über die Normalenvektoren wird die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren auch auf Ebenen übertragen.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse.

Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Achsenabschnittsberechnung ist dabei nur ein Spezialfall der besonders einfachen Schnittmengenberechnung zwischen Geraden und Ebenen (Durchstoßpunkt) in Koordinatenform.

Einen verständnisorientierten Zugang zur Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Ebene bietet das Lotfußpunktverfahren, das auch auf weitere Abstandsprobleme (vgl. QLK-G4) übertragen werden kann.

Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben.

Die Berechnung von Schnittmengen zwischen Ebenen und Geraden ist sowohl über ein 3x3-LGS möglich, wenn beide in Parameterform vorliegen, als auch durch Einsetzen einer Geradengleichung in eine Koordinatengleichung. Für einen Wechsel zwischen Parameterform und Koordinatenform einer Ebene wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Die Entscheidung über Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden kann direkt mit der Schnittmengenberechnung verknüpft werden.

Vernetzung:

- Der Unterricht wird durch den Einsatz von Geogebra bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entlastet. Es ist jedoch sinnvoll, numerisch einfache Fälle auch hilfsmittelfrei zu bearbeiten, um die bereits im Unterrichtsvorhaben QLK-A2 erworbenen Kompetenzen zu reaktivieren und zu festigen.

Vertiefung:

- Die Bestimmung eines Normalenvektors mit Hilfe des Vektorproduktes ist nicht primär wegen der technischen Einfachheit gewinnbringend, sondern weil die Entwicklung einer tragfähigen geometrischen Vorstellung des Vektorproduktes sowie eine Beschreibung seiner algebraischen Eigenschaften den im Unterrichtsvorhaben QLK-G1 für das Skalarprodukt beschrittenen Weg weiterverfolgt und auch eine hohe Relevanz für den Physikunterricht besitzt. Vertiefend kann das Vektorprodukt für die Flächenberechnung bei Parallelogrammen und Dreiecken sowie für die Volumenberechnung beim Spatprodukt eingesetzt werden.
- Die Berechnung von Schnittmengen zwischen zwei Ebenen kann besonders einfach mit einer Gleichung erfolgen, wenn eine Ebene in Koordinaten- und eine in Parameterform gegeben ist.

Vertiefend kann die Parallelität zwischen einer Ebene und einer Geraden durch die lineare Abhängigkeit des Richtungsvektors der Geraden von den Spanvektoren der Ebene beschrieben werden (Komplanarität).

Vernetzung:

Die Gleichungen eines linearen 2×3 - oder 3×3 -Gleichungssystem (QLK-A2) können als Koordinatengleichungen interpretiert werden, so dass die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden kann. Ihre Dimension lässt sich aus der Lagebeziehung der Ebenen erkennen. Dabei wird deutlich, wie weit die Normalenvektoren die Lagebeziehungen zwischen 2 oder 3 Ebenen bestimmen.

Leitbild: ★

Europa: Die Untersuchung geometrischer Objekte im Raum bietet von internationalen architektonischen Meisterwerken bis zu liegenden Werbet Teppichen (Cam Carpets) im europäischen Fußball viele Anknüpfungspunkte. Aufgaben dazu finden sich im eingeführten Lehrwerk.

Summe Leistungskurs Q1: 100 LK-Stunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 78 LK-Stunden

Qualifikationsphase

Leistungskurs Q2

Unterrichtsvorhaben QLK-G3: Lagebeziehungen und Abstandsberechnungen
(Zeitbedarf: ca. 15 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen
- führen Spiegelungen an Ebenen durch
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-5** führen Darstellungswechsel sicher aus
- **Ope-8** erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern
 - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum
- **Pro-6** wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus
- **Kom-5** formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege
- **Kom-6** verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang
- **Kom-7** wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus
- **Kom-8** wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen
- **Kom-9** dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent
- **Kom-10** konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte

Umsetzung:

Die Abstandsbestimmung erweitert sowohl die Beschreibung von Lagebeziehungen als auch die Schnittmengenproblematik.

Am Beispiel des Vorbeifluges eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen, insbesondere ein Lösungsweg mit den Mitteln der Analysis. Die Mittel der Analysis lassen sich auch nutzen, um im Anschluss den minimalen Abstand zweier Flugobjekte mithilfe eines MMS zu bestimmen. Im Unterschied dazu knüpft die Abstandsberechnung von Flugbahnen an die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden aus dem Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Ihre Berechnung kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten -

insbesondere unter Einschluss von Hilfsebenen - genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nicht.

Geometrische Körper, wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder, bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere eine Grundebene, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Durch Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) wird die Frage nach einer systematischen Untersuchung von Spiegelungen an Ebenen evoziert. Dabei wird das Verfahren der Lotfußpunktbestimmung mit Hilfe eines Normalenvektors (LK-G2) wiederaufgegriffen, wobei in der Spiegelungsebene die Schattenbilder erneut auftreten.

Abstandsbestimmungen von Punkten zu Geraden (LK-G4) und zu Ebenen (LK-G2) ermöglichen es, die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen.

Im Rahmen der Untersuchung geometrischer Körper werden Winkel zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmt. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Die Parameterform von Ebenen hat ihren Einsatz vor allem da, wo es um die Frage geht, ob ein Durchstoßpunkt einer Geraden (z.B. ein Lotfußpunkt, Schattenpunkt) eine bestimmte Fläche trifft oder außerhalb dieser liegt.

In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Dokumentation von Lösungswegen gelegt.

Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit in Bezug auf Beweisaufgaben nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.

Es werden Problemlösungen mit prozessbezogenen Zielen zu verbinden:

1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt zu vergleichen.

Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug Geogebra zurückgreifen und dessen Grenzen ausloten. Bei aufwendigeren Problemen soll dieser Teil der Lösung bewusst ausgeklammert werden.

Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar auf das Abitur vorbereitet.

Vertiefung:

- Virtuelle Landschaften mit Lichteffekten können im Rahmen einer begrenzten Projektarbeit/Facharbeit mit räumlicher Geometriesoftware gestaltet werden. In einem Kaleidoskop können Spiegelungen verkettet werden und so auch Drehsymmetrien erzeugt werden.
- Geogebra bietet die Möglichkeit, vertiefend das Spatprodukt bzw. die Determinante als Kontrollgröße für Volumina kennenzulernen, ohne die dahinterliegenden algebraischen Strukturen offenzulegen. Auch über die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren und speziell über den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden können damit Aussagen gemacht werden, die ein tiefergehendes geometrisches Verständnis unterstützen.
- Bei Beweisaufgaben, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Problemlösens zusammengeführt werden müssen, sollen die Schülerinnen und Schüler auch Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und z.T. selbst vornehmen.

Vernetzung:

- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder auf.
- Beim Berechnen von Flächen und Volumina werden, wo möglich, auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. Vertiefend ist hier auch der Einsatz des Vektorproduktes (vgl. QLK-G3) möglich.
- Das Unterrichtsvorhaben knüpft sehr eng an das Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Insbesondere ist eine integrierende Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden und ihrer Bestimmung vorzusehen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung (E-A4) bietet sich durchgehend an und sollte unter der Maxime einer möglichst großen Lösungsvielfalt und als Chance zur Binnendifferenzierung nicht fehlen.

Unterrichtsvorhaben QGK-S1: Statistik und Wahrscheinlichkeit
(**Zeitbedarf:** ca. 15 LK-Stunden)**Inhaltsfeld:** Stochastik (S)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
- verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
- bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen

$A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,

- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
- lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-1** wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an
- **Ope-2** übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt
- **Ope-3** führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
- **Ope-4** verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
- **Ope-5** führen Darstellungswechsel sicher aus
- **Ope-10** recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch
- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit.

Umsetzung:

Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS (Nutzung des Zufallsgenerators) – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten wie Zufallsantworten bei sensiblen Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Leitbild: ★ ★

Europa: Der europäische Wert Vielfalt sollte bei diesem Unterrichtsvorhaben besondere Berücksichtigung finden, da Dichotomien in stochastischen Modellierungen diesem Wert entgegenstehen können. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

BNE: Die Ziele Gesundheit und Wohlergehen (anhand der Wirkung von Medikamenten) und Geschlechtergleichheit (Zusammenhänge bestimmter Merkmale mit dem Geschlecht) werden durch vielfältige Aufgaben in den Blick genommen.

Unterrichtsvorhaben QGK-S2: Binomialverteilung

(**Zeitbedarf:** ca. 13 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme, Binomialkoeffizient

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel
- begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können
- erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung
- nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen
- interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten (...) Zufallsgrößen
- **Mod-1** erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- **Mod-2** treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
- **Mod-3** übersetzen zunehmend komplexe
- **Mod-4** ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
- **Mod-5** erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
- **Mod-6** beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
- **Mod-7** reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
- **Mod-8** benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
- **Arg-5** begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente
- **Arg-6** entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- **Arg-7** nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- **Arg-8** verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen

Umsetzung:

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die

Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Ausgehend von der kombinatorischen Bedeutung wird der Binomialkoeffizient im Folgenden in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel berechnet. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger

Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen

Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k , p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Das Konzept der σ -Umgebungen wird durch die Untersuchung von Binomialverteilungen mit verschiedenen n und p entwickelt. Die σ -Regeln werden benutzt, um Prognoseintervalle für unterschiedliche Sicherheitswahrscheinlichkeiten zu ermitteln und im Sachzusammenhang zu interpretieren.

Am Ende dieses Unterrichtsvorhabens bietet sich die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Stichprobenumfang und der Länge des Prognoseintervalls zu untersuchen und durch eine Visualisierung mithilfe eines MMS das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu veranschaulichen.

Leitbild: ★ ★

Unterrichtsvorhaben QGK-S3: Prognoseintervalle – Konfidenzintervalle - Normalverteilung

(**Zeitbedarf:** ca. 13 LK-Stunden)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Binomialverteilung: σ -Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang
- Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“), Parameter μ und σ , Graph der Verteilungsfunktion

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- ermitteln mithilfe der σ -Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext
- ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter p einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit)
- schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab
- unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion
- untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen
- beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß’sche Glockenkurve“)

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- **Ope-12** verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei (...) im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen
 - Berechnen der Grenzen von Konfidenzintervallen im Leistungskurs
- **Pro-1** stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen
- **Pro-2** analysieren und strukturieren die Problemsituation
- **Pro-10** überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung
- **Pro-12** vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz
- **Arg-4** erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen
- **Kom-1** erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathemathikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen
- **Kom-2** beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren
- **Kom-3** erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungs-bezogenen Zusammenhängen
- **Kom-4** erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind
- **Kom-11** greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter
- **Kom-12** nehmen zu mathemathikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung
- **Kom-14** vergleichen und beurteilen mathemathikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,

- **Kom-15** führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen

Umsetzung:

Ausgehend von der Modellierung einer Sachsituation (z.B. Wahrscheinlichkeit von Retouren im Onlinehandel; Glücksrad auf einer schiefen Ebene; Eichgewicht bei Lebensmittelverpackungen) mit einer Binomial-verteilung, deren Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt ist, stellt sich die Frage nach der Schätzung der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit. Eine erste Annäherung erfolgt durch die Punktschätzung der relativen Häufigkeit in einer Stichprobe (Rückschluss auf die Gesamtheit).

Um zu einer Intervallschätzung zu kommen, werden zunächst mithilfe eines MMS von der Trefferwahrscheinlichkeit p abhängige 95%-Prognoseintervalle in einem

Ellipsendiagramm dargestellt, deren Randfunktionen durch $h_{\pm}$ mit $h_{\pm}(p) = p \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ beschrieben werden.

Mithilfe dieser Darstellung kann für eine relative Häufigkeit in einer Stichprobe ein Intervall von Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, das mit dieser Stichprobe „verträglich“ ist. Dieses Intervall wird als Konfidenzintervall bezeichnet (Rückschluss auf die Gesamtheit). Um Konfidenzintervalle für andere relative Häufigkeiten, Sicherheitswahrscheinlichkeiten (Konfidenzniveaus) und Stichprobengrößen zu ermitteln, werden die Grenzen von Konfidenzintervallen auch rechnerisch mithilfe eines MMS bestimmt.

Es wird auch die Mindestgröße n einer Stichprobe zu einer vorgegebenen Länge eines Konfidenzintervalls abgeschätzt.

Weitere Kontexte: Politbarometer; Corona-Schnelltests, auf deren Beipackzetteln oft Konfidenzintervalle angegeben sind

Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dazu bietet sich an, zunächst mit einem MMS die Häufigkeiten der Augensummen von zwei, drei, vier... Würfeln zu simulieren, wobei in der graphischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich des Mittelwerts und der Standardabweichung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang, beispielsweise bei der Untersuchung des Abstandes der Wurftreffer zum Mittelpunkt einer Dartscheibe oder der Länge zufällig ausgewählter Schrauben.

Hervorzuheben ist im Unterricht, dass es sich bei Normalverteilungen um Wahrscheinlichkeitsverteilungen von stetigen Zufallsgrößen handelt, im Unterschied zu den bislang behandelten diskreten Zufallsgrößen.

Da auf dem MMS Normalverteilungen einprogrammiert sind, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. QLK-A3).

Die Visualisierung und Berechnung von Flächen bzw. Wahrscheinlichkeiten erfolgt mithilfe eines MMS.

Der Einsatz des MMS wird zum Anlass genommen, festzustellen, dass es sich bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung („Gauß'sche Glockenkurve“) um den Graphen

einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion („Gauß'sche Integralfunktion“) kein Term angegeben werden kann.

Vernetzung:

Zur Vernetzung mit Aspekten der Analysis (Grenzwertbetrachtung, Integralrechnung) bietet sich der Bezug zu uneigentlichen Integralen an.

Leitbild: ★ ★ ★

BNE: Das Ziel Gesundheit und Wohlergehen (z.B. Coronaschnelltests) wird durch vielfältige Aufgaben in den Blick genommen.

Summe Leistungskurs Q2: 75 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 56 LK-Stunden

3. Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Am Bettina-von-Arnim-Gymnasium in Dormagen erfolgt die Leistungsbewertung auf Grundlage der verbindlichen Bestimmungen des Schulgesetzes sowie der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für die gymnasiale Oberstufe (APO-GOST).

Die Beurteilung der Schülerleistungen umfasst – entsprechend den in der APO-GOST festgelegten Gewichtungen – die beiden Bereiche „Schriftliche Klausuren“ und „Sonstige Leistungen im Unterricht/Sonstige Mitarbeit“, die gemeinsam die Gesamtbewertung ergeben.

Bewertet werden dabei sowohl fachliche Inhalte als auch prozessbezogene Kompetenzen, die im Unterricht erworben werden. Dazu zählen u. a. die Fähigkeiten zu Operieren, Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen und Modellieren. Die Überprüfung dieser Kompetenzen erfolgt durch vielfältige Formen der Leistungsfeststellung.

Für die einzelnen Beurteilungsbereiche gelten am Bettina-von-Arnim-Gymnasium die folgenden Regelungen:

3.1 Beurteilungsbereich „Klausuren“

Die Klausuren dienen dazu, den Lernstand nach einer abgeschlossenen Unterrichtsreihe oder thematischen Einheit festzustellen und die Schülerinnen und Schüler schrittweise an die hohen Anforderungen der gymnasialen Oberstufe zu gewöhnen. Sie zeigen, in welchem Umfang die Lernenden die gestellten Aufgaben mithilfe der im Unterricht erarbeiteten Kompetenzen bewältigen können. Aus diesem Grund sind Klausuren stets eng mit den im Unterricht behandelten Inhalten zu verknüpfen.

3.1.1 Gestaltung der Klausuren

Alle Klausuren der Oberstufe bestehen aus einem hilfsmittelfreien Teil A, in dem ausschließlich ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung verwendet werden darf, sowie einem Teil B, in dem zusätzlich der CAS aus der GeoGebra-App und die IQB-Formelsammlung zugelassen sind.

Die Aufgaben werden auf Grundlage der verbindlichen Operatoren formuliert. Klausuren erfassen den Lernerfolg nach einer abgeschlossenen Unterrichtsreihe und zeigen, inwieweit die Schülerinnen und Schüler die gestellten Aufgaben mithilfe der erworbenen Kompetenzen bewältigen können. Aus diesem Grund müssen Klausuren stets im engen Zusammenhang mit dem Unterricht stehen.

Alle drei Anforderungsbereiche (AFB I: Reproduzieren, AFB II: Zusammenhänge herstellen, AFB III: Verallgemeinern und Reflektieren) werden entsprechend der Bildungsstandards Mathematik angemessen und zunehmend berücksichtigt, wobei der Schwerpunkt auf dem Anforderungsbereich II liegt.

Darüber hinaus sollen Klausuren im Verlauf der Oberstufe zunehmend an die inhaltlichen und formalen Anforderungen des schriftlichen Abiturs heranführen. Dazu gehört insbesondere, dass die Kriterien zur Bewertung transparent und nachvollziehbar gestaltet werden.

Da neben der fachlichen Qualität auch die Darstellung von Lösungen eine wichtige Rolle spielt, wird dieser Aspekt bei der Leistungsbewertung angemessen berücksichtigt. Häufige Verstöße gegen sprachliche Richtigkeit können zu einer

Notenverschlechterung gemäß APO-GOST führen. Eine doppelte Berücksichtigung sprachlicher Fehler erfolgt nicht, wenn diese bereits im Rahmen der Darstellungsleistung fachspezifisch eingeflossen sind.

Die Bepunktung und Notenzuordnung erfolgt dabei nach dem Bepunktungsraster im Abitur:

Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Prozent ab (in %)	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	27	20	0

3.1.2 Anzahl und Dauer der Klausuren

Für die Anzahl der Klassenarbeiten gelten die Vorgaben. Die Fachkonferenz Mathematik des Bettina-von-Arnim-Gymnasiums hat folgende Anzahl und Dauer der Klassenarbeiten beschlossen:

Jahrgangsstufe / Halbjahr	Grundkurs		Leistungskurs		Hinweise
	Anzahl	Dauer	Anzahl	Dauer	
EF/1	2	90 min	-	-	Die 2. Klausur ist eine Zentrale Klausur des Ministeriums
EF/2	2	90 min	-	-	
Q1 / 1	2	135 min	2	180 min	
Q1 / 2	2	135 min	2	180 min	Im GK nur für die SuS, die Mathe als 3.Abiturfach gewählt haben.
Q2 / 1	2	180 min	2	225 min	
Q2 / 2	1	255 min	1	300 min	

3.2 Beurteilungsbereich „sonstige Mitarbeit“

Die Bewertung der „Sonstigen Mitarbeit“ resultiert aus kontinuierlichen Beobachtungen während des Schuljahres. Grundsätzlich ist dabei zwischen der Qualität und Quantität der erbrachten Leistungen zu differenzieren.

Qualität:

- Reproduktion (Anforderungsbereich I),
- Transfer (Anforderungsbereich II),
- Problemerkfassung, -lösung und -beurteilung (Anforderungsbereich III)

Quantität:

- Häufigkeit
- Regelmäßigkeit

Die Lehrkraft sorgt für größtmögliche Transparenz bei der Leistungsbewertung – insbesondere im Bereich der sonstigen Mitarbeit. Zu Beginn jedes Schuljahres ist sie angehalten den neuen Lerngruppen die Bewertungsmaßstäbe zu erläutern und diese bei Bedarf zu wiederholen.

3.2.1 Beurteilungsaspekte

In die Bewertung der sonstigen Leistungen fließen am Bettina-von-Arnim-Gymnasium vor allem die folgenden Bereiche ein, die den Schülerinnen und Schülern zu Beginn des Schuljahres transparent erläutert werden:

- **Beiträge im Unterrichtsgespräch:** Qualität, Häufigkeit und Beständigkeit der mündlichen Mitarbeit.
- **Interaktion mit Mitschülerinnen und Mitschülern:** Aufgreifen und Weiterentwickeln von Beiträgen anderer sowie unterstützendes Verhalten gegenüber Lernenden.
- **Umgang mit fachlichen Problemstellungen:** Aktive Beteiligung an der Suche nach neuen oder alternativen Lösungswegen.
- **Selbstständigkeit:** Eigenverantwortliches Arbeiten im Unterricht.
- **Mitarbeit in kooperativen Lernformen:** Rolle innerhalb der Gruppe sowie respektvoller Umgang mit anderen.
- **Erstellung eigenständiger Leistungen:** Zum Beispiel Referate, Projekte oder Protokolle.
- **Präsentation von Ergebnissen:** Vorstellen von Ideen, Lösungswegen oder Arbeitsschritten in kurzen vorbereiteten Beiträgen.
- **Resultate kurzer schriftlicher Übungen.**

Zusätzlich erhalten die Schülerinnen und Schüler in allen Jahrgangsstufen zunehmend die Möglichkeit, mathematische Inhalte eigenständig, zusammenhängend und vor der Lerngruppe zu präsentieren

3.2.2 Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist es besonders wichtig, dass Schülerinnen und Schüler ermutigt werden, sich aktiv und konstruktiv am Unterricht zu beteiligen. Deshalb erfolgt die Bewertung der sonstigen Leistungen – insbesondere der mündlichen Mitarbeit – nicht ausschließlich anhand fachlich korrekter Beiträge oder möglicher Fehler. Stattdessen werden auch **fragende Beiträge, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis** sowie **erste Ansätze zu Lösungen** positiv berücksichtigt.

Im Folgenden werden Kriterien beschrieben, die zur Einschätzung der sonstigen Leistungen herangezogen werden und jeweils eine gute bzw. eine ausreichende Leistung veranschaulichen. Bei der Festlegung der Zeugnisnote wird stets die **kontinuierliche Lern- und Leistungsentwicklung** der Schülerinnen und Schüler betrachtet. Eine rein rechnerische Durchschnittsbildung aus einzelnen mündlichen Noten findet nicht statt.

Orientierungshilfe zur Bewertung mündlicher Beiträge im Unterrichtsgespräch:

Stufe	Qualität	Quantität / Kontinuität
sehr gut	• Aktive, selbstständige und eigeninitiativ eingebrachte Mitarbeit im Unterricht • Ausgeprägtes fachliches Verständnis sowie sicherer, eigenständiger Umgang mit Fachbegriffen und mathematischen Verfahren • Sichere und solide Beherrschung grundlegender Inhalte • Kreatives und konstruktives Anwenden, Verknüpfen und Weiterentwickeln von Kenntnissen und Methoden • Eigenständiges und differenziertes Beurteilen von Sachverhalten und Ergebnissen • Formulieren und Verfolgen weiterführender Fragestellungen aus eigener Initiative • Bewusste und aktive Gestaltung des eigenen Lernprozesses sowie engagierte Beteiligung an verschiedenen Lernsituationen	gleichmäßig hohe Beteiligung
gut	• Eigenständige und initiative Beteiligung am Unterricht • Solides fachliches Verständnis sowie sicherer Einsatz geeigneter Fachsprache und mathematischer Begriffe • Verlässliche Beherrschung grundlegender Inhalte • Selbstständiges Anwenden und sinnvoller Verknüpfen von Kenntnissen und Methoden • Überlegtes und differenziertes Beurteilen von Fragestellungen und Ergebnissen • Aktive Einflussnahme auf den eigenen Lernprozess und engagierte Mitarbeit in verschiedenen Lernsituationen	gleichmäßig hohe Beteiligung

befriedigend	• Engagierte und selbstständige Teilnahme am Unterrichtsgeschehen • Sicheres fachliches Verständnis sowie ein souveräner Gebrauch mathematischer Fachsprache • Gute Beherrschung grundlegender Inhalte und zentraler Konzepte • Eigenständiges Anwenden und sinnvolles Verknüpfen von Wissen sowie geeigneter Methoden • Reflektiertes und differenziertes Beurteilen von Aufgabenstellungen und Ergebnissen • Aktive Gestaltung des eigenen Lernprozesses und verlässliche Mitarbeit in unterschiedlichen Lernformen	insgesamt gleichmäßige Beteiligung
ausreichend	• Grundlegende Kenntnisse, mit teilweise Einsatz fachlicher Begriffe und Kategorien • Überwiegend reproduktive Beiträge, die größtenteils fehlerfrei sind • Anwenden und Verknüpfen von Wissen sowie Methoden vor allem unter deutlicher Anleitung • Nachvollziehbare Urteile, die mit notwendiger Unterstützung entwickelt werden • Aktive Beteiligung am eigenen Lernprozess und Mitarbeit in entsprechenden Lernsituationen	gleichmäßige bis unregelmäßige Beteiligung
mangelhaft	• Weitgehend zurückhaltendes Verhalten, Beteiligung erfolgt meist erst nach ausdrücklicher Aufforderung • Lückenhafte grundlegende Kenntnisse • Häufig fehlerhafte Beiträge, auch bei einfachen, reproduktiven Aufgaben • Anwenden und Verknüpfen von Wissen gelingt größtenteils nur unter intensiver Anleitung • Unbegründete oder inhaltlich wenig tragfähige Aussagen	unregelmäßige Beteiligung
ungenügend	• Keine aktive Beteiligung, selbst grundlegende Mitarbeit ist nicht wahrnehmbar • Kaum Reaktionen trotz Aufforderung, nur sehr geringe oder keine Mitarbeit • Fehlerhafte Antworten, auch bei einfachen, reinen Reproduktionsaufgaben • Anwendung und Verknüpfung von Wissen gelingt nur mit intensiver Anleitung • Keine oder inhaltlich nicht tragfähige Beiträge zur Meinungsäußerung	sporadische Beteiligung

3.2.3 Qualitätssicherung

Zur Sicherung der Vergleichbarkeit und Transparenz der Leistungsbewertung in der Oberstufe legt die Fachkonferenz besonderen Wert auf eine enge kollegiale Abstimmung. In der Jahrgangsstufe EF werden alle Kursarbeiten im Fach Mathematik parallel geschrieben. Die Fachlehrkräfte stimmen sich hierzu inhaltlich und methodisch ab, erstellen gemeinsame oder in Aufbau und Anforderungsniveau vergleichbare Aufgabenstellungen und nutzen abgestimmte Erwartungshorizonte sowie einheitliche Bewertungsraster.

Die inhaltliche und methodische Gestaltung der Aufgaben sowie die zugehörigen Bewertungskriterien orientieren sich dabei an den im Kernlehrplan formulierten Kompetenzbereichen und Bildungsstandards des Faches Mathematik. Dadurch wird gewährleistet, dass alle Schülerinnen und Schüler – unabhängig von der Lerngruppe – vergleichbare Anforderungen erfüllen und ihre Leistungen auf Grundlage gemeinsamer Kompetenzmaßstäbe beurteilt werden.

4. Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit

Die Fachkonferenz Mathematik hat folgende grundlegende didaktische und methodischen Leitlinien festgelegt. Dabei liegt ein besonderer Schwerpunkt auf der individuellen Kompetenzentwicklung der Lernenden sowie auf anspruchsvollen, aktivierenden Lernprozessen. Der Unterricht soll so gestaltet werden, dass er der Vielfalt der Schülerschaft gerecht wird.

Transparenz der Ziele

Sowohl die Zielsetzungen einzelner Unterrichtsstunden als auch die einer gesamten Unterrichtsreihe werden den Schülerinnen und Schülern deutlich vermittelt. Ebenso wird der fachliche und curriculare Zusammenhang – bei Bedarf auch fächerübergreifend – nachvollziehbar dargestellt.

Aufbau mathematischer Kompetenzen nach dem Spiralprinzip

Wesentliche Modelle, Strategien, Begriffe und Beispiele, die im Kollegium abgestimmt wurden, werden verbindlich eingeführt und bei späteren Lernanlässen erneut aufgegriffen und vertieft.

Verständnisorientiertes Lernen

Die Unterrichtsarbeit zielt darauf ab, tragfähige mathematische Grundvorstellungen zu entwickeln und mögliche Fehlvorstellungen zu korrigieren. Dabei spielt der Wechsel zwischen symbolischen, grafischen, situativen und tabellarischen Darstellungsformen eine zentrale Rolle.

Förderung der Selbsteinschätzung

Diagnoseinstrumente wie Checklisten helfen den Schülerinnen und Schülern, grundlegende Kompetenzen einzuschätzen. Zudem erhalten sie gezielte Rückmeldungen zu Stärken und Entwicklungsbereichen sowie passende Übungs- und Förderangebote.

Weiterentwicklung mathematischer Fertigkeiten

Operatives Können wird durch produktives Üben, grundlegende Routineaufgaben und algorithmische Verfahren gefördert. Kopfübungen und vernetzende Aufgaben tragen zusätzlich zum Aufbau elementarer mathematischer Vorstellungen bei.

Alltagsbezug mathematischer Inhalte

Durch die Einbindung realer Situationen erkennen Lernende die Bedeutung der Mathematik für ihre Lebenswelt. Sie werden befähigt, alltägliche Fragestellungen mathematisch zu modellieren und zu lösen.

Reflektierter Einsatz digitaler Medien

Der sachgerechte und überlegte Umgang mit digitalen Werkzeugen – wie wissenschaftlichen Taschenrechnern oder dynamischen Darstellungs- und Repräsentationssystemen – ist fester Bestandteil des Unterrichts.

Fachsystematik anhand zentraler Ideen erfahrbar machen

Wesentliche Konzepte und grundlegende mathematische Strukturen werden so vermittelt, dass die Bedeutung der Mathematik für Wissenschaft und Gesellschaft zunehmend erkennbar wird.

Präziser Sprachgebrauch und mathematische Fachsprache

Lehrkräfte verwenden die Fachsprache korrekt und der Situation angemessen. Lernende dürfen in offenen oder kreativen Phasen zunächst alltagsnahe Formulierungen nutzen, werden jedoch schrittweise dazu angeleitet, diese durch fachlich angemessene Sprache zu ersetzen.

Vielfalt der Zugänge als Basis individueller Förderung

Selbstdifferenzierende Aufgaben und zusätzliches Material ermöglichen individuelles Lernen. Unterschiedliche Leistungsniveaus, Lerntempi und Lerntypen werden berücksichtigt. Der Lernprozess wird durch kooperative und variierende Sozialformen unterstützt.

Förderung kreativer und individueller Herangehensweisen

Der Unterricht regt dazu an, Mathematik selbstständig und schöpferisch zu betreiben. Reflexion und geeignete Methoden – etwa das Führen eines Lerntagebuchs – unterstützen die Lernenden dabei, eigene Strategien bewusst wahrzunehmen.

Unterstützung individueller thematischer Interessen

Die Lehrkräfte fördern eigenständige Auseinandersetzungen mit mathematischen Fragestellungen. Unterschiedliche Informationsquellen und unkonventionelle Lösungswege werden als Ausgangspunkt für neue Einsichten genutzt.

5. Lehr- und Lernmittel

Die Fachkonferenz Mathematik hat für die Oberstufe das digitale Lehrwerk **Lambacher Schweizer** in der neuesten Ausgabe (ab 2023) als verbindliche Grundlage festgelegt.

Auf Basis des schulinternen Lehrplans können ergänzend weitere Inhalte oder Themen aus anderen Unterrichtsmaterialien herangezogen werden. Diese zusätzlichen Angebote dienen insbesondere der inneren Differenzierung und ermöglichen eine passgenauere Förderung.

Als verbindliche Formelsammlung kommt ab der Einführungsphase bis zum Abitur die vom Westermann Verlag herausgegebene **IQB-Formelsammlung** zum Einsatz.

Wie bereits beschrieben, arbeiten die Schüler*innen in der gymnasialen Oberstufe mit der **GeoGebra-App** als MMS auf ihren iPads. Durch die durchgängige digitale Ausstattung ist es darüber hinaus jederzeit möglich, weitere mathematische Werkzeuge (bspw. Tabellenkalkulationsprogramme) sinnvoll in den Unterricht zu integrieren.

6. Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans

In regelmäßigen Abständen wird das schulinterne Curriculum im Fach Mathematik von der Fachschaft geprüft sowie die Wirksamkeit der darin festgelegten Maßnahmen besprochen. Auf dieser Grundlage werden bei Bedarf Anpassungen vorgenommen, um die Qualität des Mathematikunterrichts kontinuierlich zu sichern und weiterzuentwickeln. Zu Beginn eines jeden Schuljahres findet daher ein Austausch über die Erfahrungen des vorangegangenen Jahres statt. Diese Rückmeldungen dienen dazu, Entwicklungen zu bewerten und daraus mögliche Konsequenzen abzuleiten.

Nachfolgend werden einige exemplarische Elemente der fachlichen Qualitätssicherung beschrieben. Nach regionalen Dienstbesprechungen informiert die jeweilige Teilnehmerin bzw. der jeweilige Teilnehmer die Fachkonferenz über die besprochenen Inhalte. Relevante Materialien werden anschließend präsentiert und zentral digital bereitgestellt. Gemeinsam wird beraten, wie die gewonnenen Erkenntnisse praktisch in den Unterricht überführt werden können.

Darüber hinaus nutzt die Fachkonferenz ihre Sitzungen, um Impulse zur Weiterentwicklung der fachlichen Zielsetzungen, Unterrichtsmethoden und inhaltlichen Schwerpunkte zu setzen. Änderungen am schulinternen Curriculum werden gemeinschaftlich abgestimmt und regelmäßig evaluiert. Zu Schuljahresbeginn beraten die Fachgruppen zudem über die Rückmeldungen des Vorjahres und leiten gegebenenfalls notwendige Anpassungen ab. Jahrgangsstufenteams erarbeiten dabei konkrete Vorschläge, etwa zu alternativen Materialien, Kontexten oder zur Verteilung der Unterrichtszeit innerhalb einzelner Vorhaben, die anschließend in der Fachkonferenz abgestimmt werden.

Es werden verbindliche Vereinbarungen über zu erreichende Kompetenzziele getroffen. Zugleich prüft das Fachkollegium laufend, inwieweit die im schulinternen Lehrplan formulierten Maßnahmen geeignet sind, diese Zielsetzungen zu unterstützen.

Die Orientierung an einem gemeinsamen Curriculum sorgt für eine weitgehend parallele Unterrichtsstruktur und damit für eine hohe Vergleichbarkeit der Leistungen.

Zur Professionalisierung des Kollegiums nimmt die Fachschaft regelmäßig an Fortbildungen teil, die gemeinsam nach aktuellem Bedarf ausgewählt werden. Darüber hinaus besuchen die Lehrkräfte individuelle Fortbildungsangebote zu fachspezifischen, fachdidaktischen oder methodischen Themen. Die dabei gewonnenen Inhalte werden in der Fachgruppe vorgestellt und fließen in die gemeinsame Unterrichtsentwicklung ein.

7. Bezug zum Medienkompetenzrahmen NRW

	EF	Q-Phase
1. BEDIENEN UND ANWENDEN		
1.1 Medianausstattung (Hardware)		
Medianausstattung (Hardware) kennen, auswählen und reflektiert anwenden; mit dieser verantwortungsvoll umgehen	Einstieg in Oberstufe, MMS als alltäglicher Begleiter (GeoGebra)	
1.2 Digitale Werkzeuge		
Verschiedene digitale Werkzeuge und deren Funktionsumfang kennen, auswählen sowie diese kreativ, reflektiert und zielgerichtet einsetzen	50 interaktive Anwendung digitaler Medien. Vergleich verschiedener Funktionen 52 Grenzwerte verschiedener Funktionen 79 Ableiten mit MMS 83 Ableitungsfunktion 92 Tangente und Normale 127 Untersuchung von Randwerten 137 Tabellenkalkulation 141 Raumvermessung 151 Deutung von Vektoren 179 Vektoren und allgemeine Parametergleichung	11 Funktionen untersuchen und im Sachzusammenhang deuten 17 Eigenschaften von Funktionen und den zugehörigen Graphen 57 Berechnungen von Integralen 61 Tabellenkalkulation Ober- und Untersumme 69 Stammfunktionen mit MMS bestimmen 113 Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang 121 Bestimmung von Umkehrfunktionen 148 Ableitungsfunktion und der Zusammenhang zur Stammfunktion/Flächeninhalte mit dem MMS 182 Lage zweier Geraden 209 Ebenen in Parameterform 210 Gaußverfahren mit dem MMS 224 Ebenen in Koordinatenform 252 Lage zwischen Geraden und Ebenen 323 Matrizenmultiplikation mithilfe des MMS

	EF	Q-Phase
		337 Histogramme binomialverteilter Größen zeichnen
1.3 Datenorganisation		
Informationen und Daten sicher speichern, wiederfinden und von verschiedenen Orten abrufen; Informationen und Daten zusammenfassen, organisieren und strukturiert aufbewahren		
1.4 Datenschutz und Informationssicherheit		
Verantwortungsvoll mit persönlichen und fremden Daten umgehen; Datenschutz, Privatsphäre und Informationssicherheit beachten		

2. INFORMIEREN UND RECHERCHIEREN		
2.1 Informationsrecherche		
Informationsrecherchen zielgerichtet durchführen und dabei Suchstrategien anwenden		
2.2 Informationsauswertung		
Themenrelevante Informationen und Daten aus Medienangeboten filtern, strukturieren, umwandeln und aufbereiten	117 Unbekannte Fachwörter verstehen	61 Nachvollziehen der Tabellenkalkulation bei Ober- und Untersummen
2.3 Informationsbewertung		
Informationen, Daten und ihre Quellen sowie dahinterliegende		267 Beurteilung einer KI Antwort zu dem Abstand zweier windschiefer Geraden

Strategien und Absichten erkennen und kritisch bewerten		
--	--	--

2.4 Informationskritik		
Unangemessene und gefährdende Medieninhalte erkennen und hinsichtlich rechtlicher Grundlagen sowie gesellschaftlicher Normen und Werte einschätzen; Jugend- und Verbraucherschutz kennen und Hilfs- und Unterstützungsstrukturen nutzen		
3. KOMMUNIZIEREN UND KOOPERIEREN		
3.1 Kommunikations- und Kooperationsprozesse		
Kommunikations- und Kooperationsprozesse mit digitalen Werkzeugen zielgerichtet gestalten sowie mediale Produkte und Informationen teilen		
3.2 Kommunikations- und Kooperationsregeln		
Regeln für digitale Kommunikation und Kooperation kennen, formulieren und einhalten		
3.3 Kommunikation und Kooperation in der Gesellschaft		
Kommunikations- und Kooperationsprozesse im Sinne einer aktiven Teilhabe an der Gesellschaft gestalten und reflektieren; ethische Grundsätze sowie kulturell-gesellschaftliche Normen beachten		
3.4 Cybergewalt und -kriminalität		
Persönliche, gesellschaftliche und wirtschaftliche Risiken und Auswirkungen von Cybergewalt und -kriminalität erkennen sowie		

Ansprechpartner und Reaktionsmögl. kennen und nutzen		
--	--	--

4. PRODUZIEREN UND PRÄSENTIEREN

4.1 Medienproduktion und Präsentation

Medienprodukte adressatengerecht planen, gestalten und präsentieren; Möglichkeiten des Veröffentlichens und Teilens kennen und nutzen	Versch. Präsentationen in Gruppen per Beamer, ActivPanels	
---	---	--

4.2 Gestaltungsmittel

Gestaltungsmittel von Medienprodukten kennen, reflektiert anwenden sowie hinsichtlich ihrer Qualität, Wirkung und Aussageabsicht beurteilen	33 Ergebnisprüfung mit digitalen Medien	32 Überprüfung mit MMS
---	---	------------------------

4.3 Quellendokumentation

Standards der Quellenangaben beim Produzieren und Präsentieren von eigenen und fremden Inhalten kennen und anwenden		
---	--	--

4.4 Rechtliche Grundlagen

Rechtliche Grundlagen des Persönlichkeits- (u.a. des Bildrechts), Urheber- und Nutzungsrechts (u.a. Lizenzen) überprüfen, bewerten und beachten		
---	--	--

5. ANALYSIEREN UND REFLEKTIEREN

5.1 Medienanalyse

Die Vielfalt der Medien, ihre Entwicklung und Bedeutungen kennen, analysieren und reflektieren	137 Näherungsverfahren mit verschiedenen digitalen Medien 148 Unterschiedliche Geometrieprogramme zur Untersuchung	Ab 210 Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen mit unterschiedlichen digitalen Medien 353 Ticketverkäufer Untersuchung der Darstellung
5.2 Meinungsbildung		
Die interessengeleitete Setzung und Verbreitung von Themen in Medien erkennen sowie in Bezug auf die Meinungsbildung beurteilen		222 Informationen in Balkendiagrammen 307 Statistische Kenngrößen und Interpretation 310 Erwartungswert und Standardabweichung 336 Histogramme deuten und selbst zeichnen 363 Ob in Verpackungen so viel drin ist wie draufsteht? (Statistische Auswertung)
5.3 Identitätsbildung		
Chancen und Herausforderungen von Medien für die Realitätswahrnehmung erkennen und analysieren sowie für die eigene Identitätsbildung nutzen		
5.4 Selbstregulierte Mediennutzung		
Medien und ihre Wirkungen beschreiben, kritisch reflektieren und deren Nutzung selbstverantwortlich regulieren; andere bei ihrer Mediennutzung unterstützen		
6. PROBLEMLÖSEN UND MODELLIEREN		
6.1 Prinzipien der digitalen Welt		
Grundlegende Prinzipien und Funktionsweisen der digitalen		

Welt identifizieren, kennen, verstehen und bewusst nutzen		
6.2 Algorithmen erkennen		
Algorithmische Muster und Strukturen in verschiedenen Kontexten erkennen, nachvollziehen und reflektieren	58 Satz von den maximal möglichen Nullstellen einer ganzrationalen Funktion 122 Wendestellen in interaktiver Anwendung 137 Newton Verfahren 171 Lösungsstrategien Bootskollision 181 Lagebeziehung zweier Geraden Schema	21 Lineare Gleichungssysteme 56 Ober- und Untersummen Integrale 228 Schnittwinkel im Raum 302/303 Simulation von Zufallsexperimenten
6.3 Modellieren und Programmieren		
Probleme formalisiert beschreiben, Problemlösestrategien entwickeln und dazu eine strukturierte, algorithmische Sequenz planen, diese auch durch Programmieren umsetzen und die gefundene Lösungsstrategie beurteilen	72 Grafisches Ableiten mit digitalen Medien 73 Tangenten und Normale 119 Einfluss des Krümmungsverhaltens 144 Pyramiden im dreidimensionalen Raum 173, 174 Modellieren mit linearen Gleichungssystemen	Ab 73 Rekonstruktion von Beständen, Integrale Ab 81 Rotationskörper mit dem MMS 99 Auswertung eines Experiments mit dem MMS (Exponentialfunktionen) 117 Modellierung von begrenztem Wachstum (e-Funktion) 205 Geometrische Deutung des Vektorprodukts 209 Modellieren mit Ebenen im Raum 249 Spiegelebene und Spiegelung an Geraden modellieren 329 Bernoulli-formel und das Pascalsche Dreieck

		338 Histogramme und die Glockenform
6.4 Bedeutung von Algorithmen		
Einflüsse von Algorithmen und Auswirkung der Automatisierung von Prozessen in der digitalen Welt beschreiben und reflektieren		

nach: <https://www.medienpass.nrw.de/de/inhalt/arbeiten-mit-dem-medienkompetenzrahmen-nrw>