

Vergleich numerischer Integration

by: *Ariane-Tabea Schüller*



1

Vorwort

Drucken

Öffnen / Schließen

Aufgabe

Öffnen / Schließen

In der folgenden Facharbeit habe ich, Ariane-Tabea Schüller, an einem Vergleich von numerischen Integrationsmethoden gearbeitet. Ich habe die Rechteck-, Simpson- und Trapezregel miteinander verglichen und dies am Beispiel verschiedener Funktionen vorgeführt, und ausgewerte t.

Geschichte der Integration und Allgemeines

Öffnen / Schließen

Große Erkenntnisse, wie die Relativitätstheorie von Albert Einstein, brauchten viele Jahre der Entwicklung. Meistens beginnt es mit einem Zufall der zu einer Idee führt, aus welcher nach jahrelanger Arbeit ausgereifte Konzepte entstehen. In der Mathematik ist es nicht anders, so werden etwa Ereignisse wie die Mondlandung mit Hilfe von einfachsten, altbewehrten Gleichungen berechnet. Die numerische Integration hat ihren Ursprung im antiken Griechenland, in dem bereits Gelehrte versuchten den Inhalt von Flächen zu bestimmen. Dieser Grundgedanke wurde 1615 von Kepler wieder aufgegriffen und in seinem Werk „nova stereometria doliorum vinariorum“ weitergeführt, woraufhin die Integralrechnung der exakten Flächenbestimmung entdeckt wurde. Heutzutage wird diese Art der Flächenberechnung in verschiedenen Gebieten angewendet, wie z.B. in der Elektrotechnik, Dynamik, Statik, und vielen mehr.

Als allgemeine Voraussetzung für das Lösen von Integralen gilt, dass das positive Integral einer stetigen Funktion als Fläche gedeutet werden kann. Diese Fläche liegt unter der durch den Integranden bestimmten Funktion und ist durch das Intervall $[a,b]$ begrenzt. Wenn man von dem Integranden f die Stammfunktion F bilden kann, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Lässt sich zu einer Funktion f keine Stammfunktion bilden, so kann das Integral nur näherungsweise berechnet werden. Ein Beispiel dafür ist etwa das Integral:

$$\int_a^b 2 e^{3x^2} dx = 2 \int_a^b e^{3x^2} dx$$

Hier setzen nun verschiedene numerische Integrationsmethoden an - Quadraturformeln -, durch die der Wert des Integrals approximiert wird. Ein Beispiel dafür stellt etwa die Riemannschesche Ober- und Untersumme dar. Ähnlich aufgebaut sind die Rechteck-, Trapez-, und die Simpsonregel. Diese liefern aber anhand einfacher geometrischer Überlegungen genauere Ergebnisse.



Die Rechteckregeln

Drucken Öffnen/Schließen

Allgemeines zur den Rechteckregeln

Öffnen / Schließen

Die Definition des RIEMANNschen Integrals für eine stetig differenzierbare Funktion $y = f(x)$ besagt, dass das Integrationsintervall $[a, b]$ durch die Stellen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in n gleiche Rechteckflächen unterteilt wird, mit einer Länge von $h = \frac{b-a}{n}$.

Diese Approximation wird Rechteckregel genannt. Um die Höhe der Rechteckflächen zu bestimmen muss entweder der linke oder der rechte Funktionswert des Teilintervalls verwendet werden. Dementsprechend existieren zwei unterschiedliche Näherungs-gleichungen:

(1) linker Funktionswert = Untersumme = Länge * linke Höhe

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \times (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

$$\wedge \quad U_n \leq O_n$$

$$h \in \mathbb{N} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} (O_n - U_n) = 0$$

(2) rechter Funktionswert = Obersumme = Länge * rechte Höhe

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \times (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

So gelangt man nun, nach Summierung der Rechteckflächen über einem Teilintervall, zu dem einfachsten numerischen Integrationsverfahren, dem Rechteckverfahren. Im Folgenden spielt es jedoch keine Rolle, ob der linke oder der rechte Funktionswert zur Flächenberechnung benutzt wird, da bei einer hohen Anzahl von n beide Summen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Aus der Ober- und der Untersumme ist die Rechteckregel entstanden, welche im Allgemeinen genauere Ergebnisse liefert.

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx \approx h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \times h)$$

3

Trapezregel

[Drucken](#) [Öffnen / Schließen](#)

Allgemeines zur Trapezregel

[Öffnen / Schließen](#)

Eine wesentliche Verbesserung des numerischen Integralwertes erzielt man, indem die Rechteckflächen durch Trapezflächen ausgetauscht werden. Diese Approximation des Flächeninhaltes zwischen einer Funktion und der x-Achse heißt Trapezregel und gilt nur für stetig differenzierbare Funktionen, die durch ein Intervall $[a,b]$ begrenzt werden. Unterteilt man dieses Intervall in viele kleine, gleichgroße Teilintervalle, in der Form eines Trapezes, und summiert dann die Trapezflächen zusammen, so gelangt man zum Trapezverfahren.

$$\int_a^b f_n(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a_1) + \dots + f(a_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

4

Keplersche-Faßregel und Simpsonregel

Drucken Öffnen / Schließen

**Kurzbiographie Johannes Kepler
(1571-1630)**

Öffnen / Schließen



Culver Pictures, Inc. Johannes Kepler

Der deutsche Theologe, Astronom und Mathematiker Johannes Kepler wurde am 27.12.1571 in der Stadt Weil, in dem heutigen Württemberg, geboren. Nach einem ca.10-jährigen Theologie-Studium ging er nach Graz, wo ihm eine Stelle als Mathematikprofessor angeboten wurde. Im Zuge der Gegenreformation musste Kepler 1600 nach Prag fliehen und trat dort in die Dienste Kaiser Rudolfs II als Hofastronom und Mathematiker ein. Ab 1628 arbeitete Kepler hauptsächlich in Sagan unter dem Fürsten Wallenstein. Zwei Jahre später, am 15.11.1630, verstarb Kepler unerwartet während eines Besuches des Kurfürstentages in Regensburg.

Kepler ist durch viele Werke, welche sich hauptsächlich mit Astronomie und Optik beschäftigen, berühmt geworden. Darunter befinden sich die Grundgesetze der Planetenbewegung, das erste und zweite keplische Gesetz, in „Astronomia Nova“, und das dritte keplische Gesetz, in „Harmonices Mundi“, außerdem die Erfindung eines astronomischen Fernrohrs, und die Rudolphinischen Tafeln. In seinem Werk „nova stereom etria doliorum vinariorum“ verwendete er heuristische und infinitesimale Methoden, welche auch in der Fassregel zur inhaltlichen Flächenbestimmung gebraucht werden.

Keplersche Fassregel

Öffnen / Schließen

Sind die Funktionswerte für drei äquidistante Stützstellen $x_0 + h$, $x_0 + 2h$ bekannt, so gilt:

$$\int_a^b f_1(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(a_1) + f(b)]$$

Herleitung der Keplerschen Fassregel

Öffnen / Schließen

Gesucht ist die Fläche F , die die quadratische Funktion $f(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ im Intervall $[a_0;a_2]$ mit der x -Achse einschließt.

$$F \equiv \int_{a_0}^{a_2} f(u) du$$

Gegeben ist der Funktionswert in den Punkten a_0, a_1, a_2 ; d.h:

$$b_2 a_0^2 + b_1 a_0 + b_0 = f(a_0)$$

$$b_2 a_1^2 + b_1 a_1 + b_0 = f(a_1)$$

$$b_2 a_2^2 + b_1 a_2 + b_0 = f(a_2)$$

$$\text{mit } a_1 = \frac{a_0 + a_2}{2}^*$$

$$\begin{aligned} F &= \int_{a_0}^{a_2} f(u) du = \int_{a_0}^{a_2} (b_2 u^2 + b_1 u + b_0) du \\ &= b_2 \frac{1}{3} u^3 + b_1 \frac{1}{2} u^2 + b_0 u \Big|_{a_0}^{a_2} \\ &= b_2 \frac{1}{3} a_2^3 + b_1 \frac{1}{2} a_2^2 + b_0 a_2 - (b_2 \frac{1}{3} a_0^3 + b_1 \frac{1}{2} a_0^2 + b_0 a_0) \\ &= b_2 \frac{1}{3} (a_2^3 - a_0^3) + b_1 \frac{1}{2} (a_2^2 - a_0^2) + b_0 (a_2 - a_0) \\ &= b_2 \frac{1}{3} (a_2 - a_0)(a_2^2 + a_2 a_0 + a_0^2) + b_1 \frac{1}{2} (a_2 - a_0)(a_2 + a_0) + b_0 (a_2 - a_0) \\ &= \frac{a_2 - a_0}{6} [2b_2(a_2^2 + a_2 a_0 + a_0^2) + 3b_1(a_2 + a_0) + 6b_0] \\ &^* = \frac{a_2 - a_0}{6} [b_2(a_2^2 + 4\left(\frac{a_0 - a_2}{2}\right)^2 + a_0^2) + 6b_1 a_1 + 6b_0] \\ &^* = \frac{a_2 - a_0}{6} [b_2(a_2^2 + 4a_1^2 + a_0^2) + b_1(a_2 + 4a_1 + a_0) + b_0(1 + 4 + 1)] \\ &= \frac{a_2 - a_0}{6} [b_2 a_0^2 + b_1 a_0 + b_0 + 4(b_2 a_1^2 + b_1 a_1 + b_0) + b_2 a_2^2 + b_1 a_2 + b_0] \\ &= \frac{a_2 - a_0}{6} (f(a_0) + 4f(a_1) + f(a_2)) \end{aligned}$$

Die keplersche Fassregel kann bei ganzrationalen Funktionen bis dritten Grades angewendet werden. Bei anderen Funktionen würde diese Regel nur häufiger angewendet werden müssen. Um diesen Aufwand zu umgehen verwendet man die Simpsonregel, eine "Erweiterung" der keplerschen Fassregel.

Simpson Regel

Öffnen / Schließen

Die Simpsonregel lautet:

$$\int_a^b f_m(x) dx = \frac{b-a}{3m} [f(a) + 4f(a_1) + 2f(a_2) + \dots + 4f(a_{m-3}) + 2f(a_{m-2}) + 4f(a_{m-1}) + f(b)]$$

5

Funktionen berechnet mit den verschiedenen Integrationsverfahren

Drucken Öffnen/Schließen

Aufgaben

Öffnen / Schließen

Die Aufgaben die als Grundlagen dieser Facharbeit dienen, sind aus den verschiedenen Typen der Aufgabenstellung ausgesucht worden. Es sind ein Exponential-, eine Wurzel-, eine Rezipoke-, eine Sin-, eine Cos-, eine Ln-, und eine Potenz - Funktion verwendet worden. Die Aufgabe zu dem jeweiligen Funktionstyp lautet:

1.) $\text{Sin}(x)$ $[0; \frac{\pi}{2}]$

2.) x^2 $[0;5]$

3.) $\text{Cos}(x)$ $[-\frac{\pi}{2};0]$

4.) e^{x-9} $[-1;2,5]$

5.) $\sqrt{x+9}$ $[0;1000]$

6.) $\frac{1}{x+3}$ $[0;15]$

7.) $\text{Ln}(x)$ $[1;5]$

Die Beispiele 5.) bis 7.) sind nicht dargestellt.

```
Clear[f, x];      f[x_] := Sin[x] ; (* enter your f *)
```

```
a = 0;
```

```
b =  $\frac{\pi}{2}$ ;
```

```
start = 0;
```

```
stop = 10;
```

```
Input > step = 1;
```

```
tablevalues = Table[{n,  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i \frac{b-a}{n}] * \frac{b-a}{n} // N$ ,  $\sum_{i=1}^n f[a + i \frac{b-a}{n}] * \frac{b-a}{n} // N$ },
```

```
{n, start, stop, step}];
```

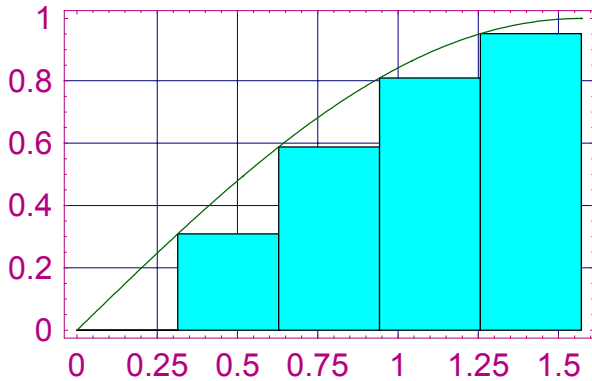
```
MDSHOWTable[tablevalues, {"n", "Untersumme", "Obersumme"}]
```

n	Untersumme	Obersumme
0	0.	0.
1	0.	1.5708
2	0.55536	1.34076
3	0.715249	1.23885
4	0.790766	1.18347
5	0.834682	1.14884
6	0.863382	1.12518
7	0.8836	1.108
8	0.89861	1.09496
9	0.910194	1.08473
10	0.919403	1.07648

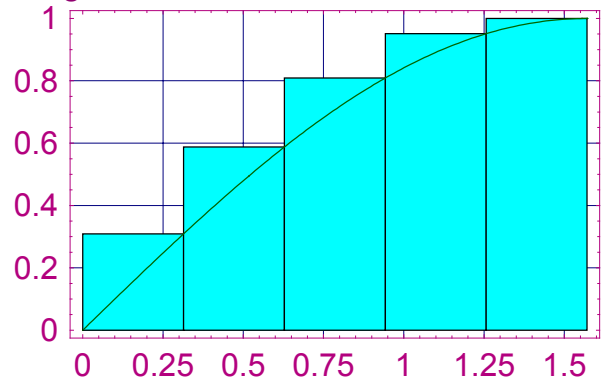
```
Clear[f, x];      f[x_] := Sin[x]
a = 0;
b =  $\frac{\pi}{2}$ ;
start = 1; (* rectangles *)
end = 15;
```

```
MDIRiemannSum[f[x], {x, a, b},
  MovieFrames -> {start, end}, RiemannSum -> {Left, Right}]
```

n = 0005, Area = 1.
Left-hand Sum = +0.834682136075238



n = 0005, Area = 1.
Right-hand Sum = +1.14884140143422

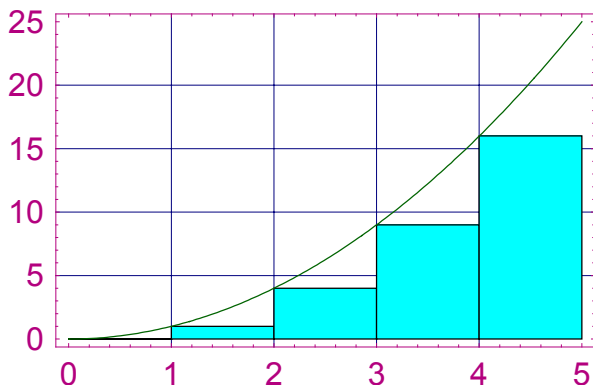


Input ▷

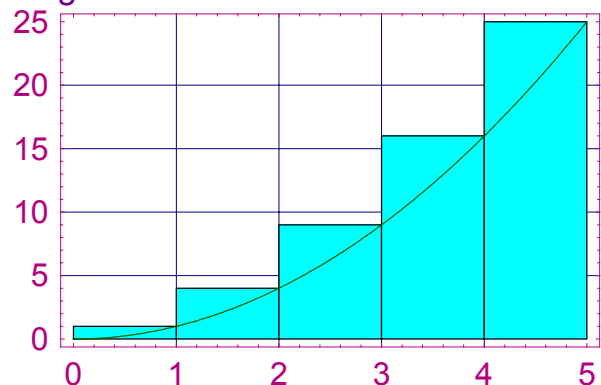
```
Clear[f, x];
f[x_] := x2
a = 0;
b = 5;
start = 1; (* rectangles *)
end = 10;
```

```
MDIRiemannSum[f[x], {x, a, b},
  MovieFrames -> {start, end}, RiemannSum -> {Left, Right}]
```

n = 0005, Area = 41.66666666666667
Left-hand Sum = +0000000000000030.



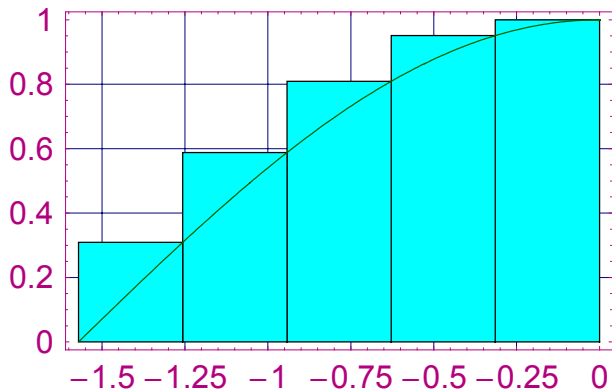
n = 0005, Area = 41.66666666666667
Right-hand Sum = +0000000000000055.



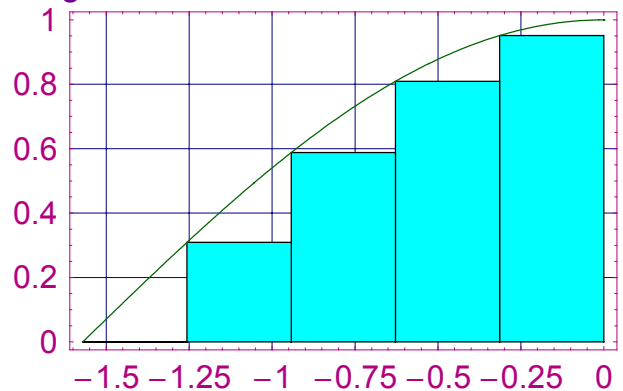
```
Clear[f , x];
f[x_] := Cos[x]
a = - $\frac{\pi}{2}$ ;
b = 0;
start = 1; (* rectangles *)
end = 10;
```

```
MDIRiemannSum[f[x], {x, a, b},
  MovieFrames -> {start, end}, RiemannSum -> {Left, Right}]
```

n = 0005, Area = -1.0000000000000002
 Left-hand Sum = -1.14884140143422



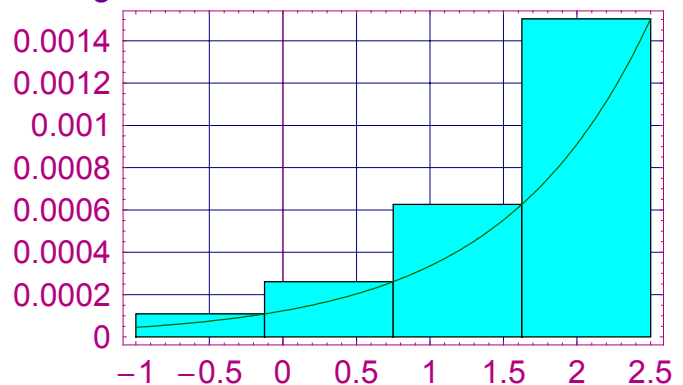
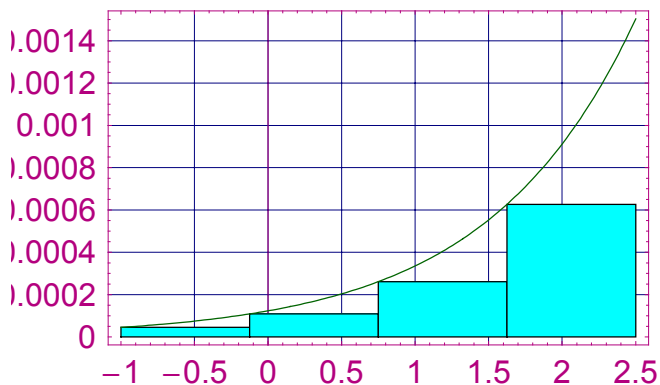
n = 0005, Area = -1.0000000000000002
 Right-hand Sum = -0.834682136075238



```
Clear[f , x];
f[x_] := ex-9
a = -1;
b = 2.5;
Input > start = 1; (* rectangles *)
end = 19;
```

```
MDIRiemannSum[f[x], {x, a, b},
  MovieFrames -> {start, end}, RiemannSum -> {Left, Right}]
```

n = 0004, Area = 0.0014580392632150873 n = 0004, Area = 0.0014580392632150873
 Left-hand Sum = +0.000912007210946717 Right-hand Sum = +0.00218779156625992



6

Selbstentwickelte Kreisregel

Drucken Öffnen/Schließen

Inhalt und Zweck der Aufgabe

Öffnen / Schließen

Zur Bestimmung der Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und zwei Grenzen [a,b], $a < b$, soll ein Näherungsverfahren erarbeitet werden, in dem die zu bestimmende Fläche mit Kreisen gefüllt wird. Diese werden von Schritt zu Schritt ($n \rightarrow n+1$) kleiner und bilden somit den Näherungswert des Integrals auf diesem Kurvenabschnitt. Um dieses Verfahren anwenden zu können, wird eine stetig differenzierbare Funktion der Form $y = f(x)$ benötigt.

Lösung der Aufgabe

Öffnen / Schließen

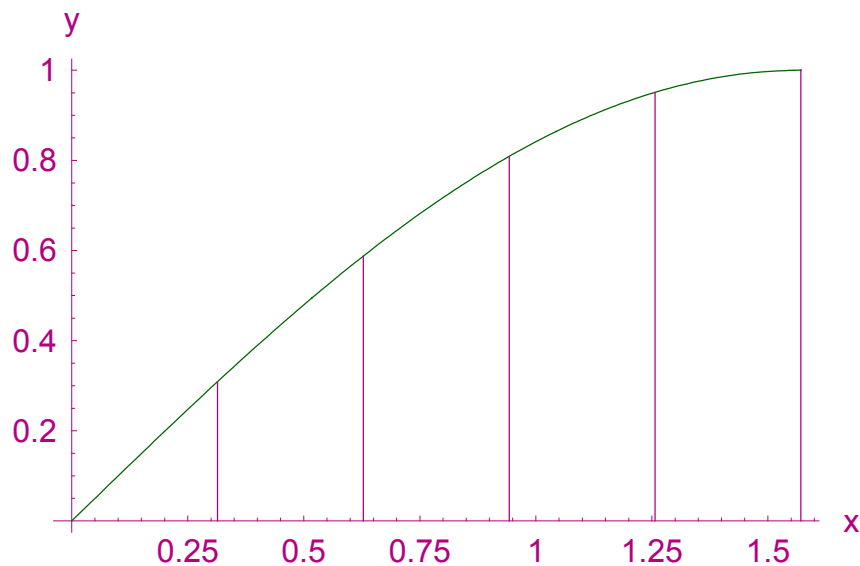
Beispiel: Das Intervall wird in $n (=5)$ gleichbreite Vertikalstreifen aufgeteilt. Die Kreise, die die zu bestimmende Fläche „füllen“ sollen, haben den Durchmesser $1/5$ von $\pi/2$. Die Mittelpunkte liegen auf Geraden zwischen den Grenzen des Vertikalstreifens. Kreise, die vollständig von der Kurve abgedeckt werden, werden voll gezählt. Teilweise abgedeckte Kreise werden nur dann berücksichtigt, wenn die Kurve den parallel zur y-Achse verlaufenden Kreisdurchmesser schneidet, jedoch nur mit der Fläche die unterhalb der Funktion liegt. Dann wäre der zweite Kreisteil in Fig.1 z.B. mit ca. 1,5 Kreisen zu bewerten. Genauer ist das Beispiel bei $x = \frac{9}{10}$ von $\frac{\pi}{2}$. Für $x = \frac{9}{10} * \frac{\pi}{2}$ ist folglich $\sin(\frac{9}{10} * \frac{\pi}{2}) = \sin 81^\circ \approx 0,9877$. Der Durchmesser der Kreise beträgt: $\frac{1}{5} * \frac{\pi}{2} \approx 0,31416$. Das bedeutet an der Stelle $\frac{9}{10} * \frac{\pi}{2}$ „passen“ 0,9877 Kreise unter den Graphen, eine Kreisfläche beträgt 0,31416, also befinden sich unter der Kurve eine Fläche von 3,144.

```

Clear[f, x];
f[x_] := Sin[x]
Graph = Plot[f[x], {x, 0,  $\frac{\pi}{2}$ }, AxesLabel -> {"x", "y"}, Epilog -> {
  Line[{{ $\frac{\pi}{10}$ , 0}, { $\frac{\pi}{10}$ , f[ $\frac{\pi}{10}$ ]}},
  Line[{{ $\frac{\pi}{5}$ , 0}, { $\frac{\pi}{5}$ , f[ $\frac{\pi}{5}$ ]}},
  Line[{{ $\frac{3\pi}{10}$ , 0}, { $\frac{3\pi}{10}$ , f[ $\frac{3\pi}{10}$ ]}},
  Line[{{ $\frac{2\pi}{5}$ , 0}, { $\frac{2\pi}{5}$ , f[ $\frac{2\pi}{5}$ ]}},
  Line[{{ $\frac{\pi}{2}$ , 0}, { $\frac{\pi}{2}$ , f[ $\frac{\pi}{2}$ ]}},

```

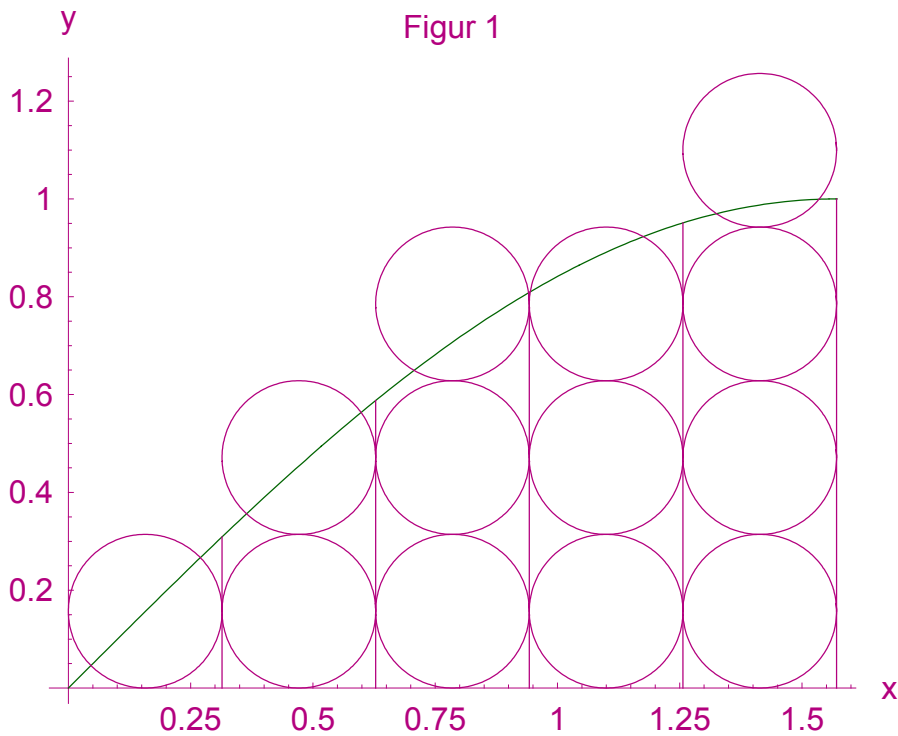
Input >



$$r = \frac{\pi}{20};$$

```
Kreise = Show[Graphics[
  {Circle[{ $\frac{\pi}{20}$ ,  $\frac{\pi}{20}$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 2r$ ,  $\frac{\pi}{20}$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 4r$ ,  $\frac{\pi}{20}$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 6r$ ,  $\frac{\pi}{20}$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 8r$ ,  $\frac{\pi}{20}$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 2r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 2r$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 4r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 2r$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 6r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 2r$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 8r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 2r$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 4r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 4r$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 6r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 4r$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 8r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 4r$ }, r]
  , Circle[{ $\frac{\pi}{20} + 8r$ ,  $\frac{\pi}{20} + 6r$ }, r]}, DisplayFunction -> Identity]];
Show[Graph, Kreise, AspectRatio -> 0.8, PlotLabel -> "Figur 1"];
```

Input ▷



Solch ein Verfahren ist erlaubt, da mit hinreichend großem n die Kreise beliebig klein gemacht werden können: Für $n \rightarrow \infty$ ist der Grenzwert das Integral!

n = 1 Der Mittelpunkt liegt bei $x = \pi/4$
 d.h. $y = \sin \pi/4 = \sin 45^\circ = 0,7071$
 Der Kreisdurchmesser ist $\pi/4 = 0,7854$

$$\frac{0,7071}{0,7854} = 0,9$$

Für n = 5 gilt:

```
Clear[f, x];      f[x_] := Sin[x] ; (* enter your f *)
start = 1;
stop = 11;
step = 2;
```

Input >

```
tablevalues = Table[{  $\frac{\pi x}{20}$ , f[  $\frac{\pi x}{20}$  ],  $\frac{10 f[\frac{\pi x}{20}]}{\pi}$  } // N, {x, start, stop, step}];
MDSHOWTable[tablevalues, {"Bogenmaß", f[x], "Kreise"}];
```

Bogenmaß	Sin [x]	Kreise
0.15708	0.156434	0.497946
0.471239	0.45399	1.4451
0.785398	0.707107	2.25079
1.09956	0.891007	2.83616
1.41372	0.987688	3.14391
1.72788	0.987688	3.14391

Ein Kreis mit dem Durchmesser 0,31416 hat die Fläche:

$$F = \frac{D^2}{4} * \pi = 0,0775$$

Maßzahl (Kreise) = Summe der Kreisteile * Fläche der Kreise
 = $13,1329 * 0,0775 = 1,0178$

Der gefundene Wert für $n = 6$ ist 1,0178, der tatsächliche Wert des Integrals ist 1,0.

Nach 6 Schritten ist der Fehler noch:

$$\frac{1,0 - 1,0178}{1} = 1,78\%$$

7

Auswertungen

[Drucken](#)
[Öffnen/Schließen](#)

Allgemeine Auswertung

[Öffnen / Schließen](#)

Zusammenfassend kann man nun sagen, dass das Verfahren das bei $n=1$ dem Wert des eigentlichen Integrals am nächsten liegt, auch bei $n=15$ das genaueste Ergebnis liefert. Dies trifft auf die Simpsonregel zu. Im Gegensatz dazu ergibt die Approximation der Untersumme immer die ungenauesten Ergebnisse. Der Simpsonregel folgen die Rechteckregel, Trapezregel, und die Obersumme. Aus dieser Rangordnung folgend, ist die Simpsonregel ca. 22 mal genauer als die Trapezregel, ca. 13 mal genauer als das Rechteckverfahren, ca. 757 mal genauer als die Obersumme und ca. 809 mal genauer als die Untersumme.

Der durchschnittliche Fehler der Untersumme beträgt 0,0947852 der, der Obersumme 0,0886888. Der Verfahrensfehler der Rechteckregel ist 0,00158, welcher zwar für n gegen 0 geht, aber nur proportional zu n abnimmt. Deshalb muss n verzehnfacht werden, um die Genauigkeit um eine Dezimalstelle zu verbessern. In den meisten Fällen ist bei gegebenen n Formel (3) genauer als die Formeln (1) und (2). Wie in allen Approximationsverfahren, wächst die Genauigkeit aller Formeln mit wachsendem n .

Approximationsgeschwindigkeit (A)

Öffnen / Schließen

Um die Approximationsgeschwindigkeit (A) zu bestimmen werden die benötigten Schritte -n- für die geforderte Genauigkeit -G- berechnet. Dies geschieht mit dieser Formel:

$$A = \frac{n}{G},$$

wobei man bei diesem Verfahren von den schlechtesten Ergebnissen ausgehen, sollte um dann eine Genauigkeit zu bestimmen, da sonst z.B. bei der Untersumme die geforderten Schritte zu groß werden könnten.

Die gewählte Genauigkeit beträgt 8%, welche bei dem selbstentwickelten Kreisverfahren schon nach 6 Schritten erreicht ist. 8% der Ln(x) Funktion sind gleichbedeutend mit 0,0566066. Die Simpsonregel muss leider außer Betracht gelassen werden, da sie schon einen Anfangswert von 0,044599 besitzt. Die Trapez- und Rechteckregel haben schon nach dem zweiten Schritt die 8% Hürde überwunden. Bei n=10 und n=11 erreichen dann auch Ober- und Untersumme die gewünschte Genauigkeit.

Die Rezipoke-Funktion lässt die Dinge ganz anders aussehen. Hier wird die geforderte Genauigkeit schon nach dem ersten, bzw. dem zweiten und dritten Schritt erreicht. E-Funktion, Wurzel-Funktion, Sin(x), und Cos(x) können jeweils zu einer der beiden Approximationsgeschwindigkeitsmöglichkeiten dazugezählt werden.

Die Wurzel-Funktion, Sin(x), und Cos(x) ähneln der Ln(x)-Funktion, da auch hier schon nach dem zweiten Schritt Trapez- und Rechteckregel die 8% erreicht haben, das Simpsonverfahren von Anfang an mit einem zu genauen Wert eingestiegen ist, und Ober- und Untersumme die Genauigkeit nach dem zehnten bzw. elften Schritt erfüllt haben.

Die Exponential-Funktion schneidet etwas schlechter als die Ln(x)-Funktion ab. Sie erlangt die 8% mit n=2, 3, und 4, ist damit aber immer noch genauer als die Gruppierung um die Rezipoke-Funktion.

Zuletzt bildet die Potenzfunktion noch eine Gruppe für sich, da hier Trapez-, Simpson-, und Rechteckregel mit dem gleichen Wert einsteigen wie bei n=10.000. Folglich verändert sich dieser Wert auch nicht mehr. So wie diese drei Regeln nun viel zu gut abgeschnitten haben, so fällt das Ergebnis der Ober- und Untersumme umso schlechter aus. Hier wird die Genauigkeit von 8% erst bei dem 14. Schritt erlangt.

Allgemein lässt sich sagen, dass die Trapez-, Simpson-, und Rechteckregel bei der Approximationsgeschwindigkeit am besten abschneiden, wobei die Simpsonregel meist nicht beachtet werden kann, da der Anfangswert bei n=1 die Genauigkeit bereits übersteigt. Ober- und Untersumme erlangen meist erst bei einer hohen Anzahl von n die gewünschte Genauigkeit.

Zusammenfassung

Öffnen / Schließen

Nach gründlicher Auswertung der einzelnen Näherungsverfahren, angewendet bei verschiedenen Funktionen, lässt sich sagen, dass generell die Simpsonregel das genaueste Ergebnis liefert. Nah an dem eigentlichen Wert des Integrals zu liegen ist immer sehr wünschenswert, doch sollte dabei der Aufwand zur Bestimmung dessen beachtet werden. In der Kybernetik, bei Steuerungsprozessen, oder in der Chemie, bei der Überwachung einzelner Prozesse, kommt es nicht auf eine vier- oder fünf- prozentige Genauigkeit an, sondern auf die Geschwindigkeit in welcher diese berechnet werden kann. Damit ist nicht die Approximationsgeschwindigkeit gemeint, sondern der eben erwähnte Aufwand zur Berechnung des Wertes. Bei der Obersumme gelangt man z.B. zu einem Ergebnis, indem man die Länge des Intervalls, $b-a$, durch n -Schritte teilt und mit dem rechten Funktionswert multipliziert. Die Simpsonregel liefert zwar einen 757 fach-genaueren Wert, benötigt aber drei bekannte äquidistante Stützstellen, und ist auch in ihrer Berechnung um einiges komplizierter als die Obersumme.

Dem zufolge kann das eine Integrationsverfahren nützlich für eine Sache sein, doch wegen seinem Aufwand für andere Zwecke nicht verwendet werden. Glücklicherweise befinden wir uns im Zeitalter des Internets und der Computer, die egal welches Verfahren, in sekundenschnelle zu einem Ergebnis kommen. Somit ist spontanes Reagieren bei z.B. der Steuerung von Flugzeugen viel einfacher geworden.

Schlusswort

Öffnen / Schließen

So viele Jahre wie die numerische Integration nun schon besteht, so umfangreich und vielfältig sind auch ihre grundlegenden Verfahrensweisen. In dieser Facharbeit wurden von den verschiedenen Berechnungsmethoden der numerischen Integration nur wenige behandelt. Jedoch denke ich, dass die Verwendung einiger der bekanntesten Approximationsverfahren für den Vergleich von der Flächenbestimmung eines Integrals ein genügend breites Spektrum bieten.



Quellenverzeichnis

[Drucken](#)[Öffnen / Schließen](#)

Allgemeine Quellen

[Öffnen / Schließen](#)

1. Leistungskurs Analysis
Von Hans Freudigmann, Günther Reinelt, Siegfried Schwehr, Jörg Stark, Manfred Zinser, und Günther Taetz
Ernst Klett Verlag, 2002
Stuttgart Düsseldorf Leipzig
2. dtv-Atlas, Analysis und angewandte Mathematik
Band 1 und 2
Deutscher Taschenbuch Verlag, 2001
3. Taschenbuch der Mathematik
Von Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig
Verlag Harri Deutsch, 5. Auflage 2001
4. Höhere Mathematik griffbereit
Von M.J.Wygodski
Friedr. Vieweg & Sohn-Braunschweig, 2. Auflage 1977

Kepler Quellen

[Öffnen / Schließen](#)

1. Mathematiker-Lexikon
Von Herbert Meschkowski
Hochschultaschenbücher Bibliographische Institut, 1964
Seite 138-139
2. Biographien bedeutender Mathematiker
Von Hans Wußing und Wolfgang Arnold
Aulis Verlag Deubner & Co Köln, 1978
Seite 132-148
3. Lexikon der Schulmathematiker
Von H. Athen und J. Bruhn
Aulis Verlag Deubner & Co KG, 1977
Seite 467
4. abc Mathematik
von Walter Gellert und Herbert Kästner und Dr. Siegfrie Neuber
Harri Deutsch, 1978
5. Bild von Kepler:
www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/6580/webdoc1.htm

[Neues Kapitel](#)[Kapitel ausschneiden](#)



Drucken

Öffnen / Schließen

Erzeuge deinen eigenen [surfing GUIDE](#) für Mathematik!