Flächenberechnung einer Cardioide

by: Irina Beitler und Maike Kuhnert

1 Einleitung:

Drucken Öffnen / Schließen

In dieser Arbeit stellen wir, Irina Beitler und Maike Kuhnert, eine Aufgabe aus dem Gebiet der numerischen Integration vor:
Die Aufgabe besteht darin, die maximale Fläche, die eine Ziege, die mit einem Seil an einen Turm gebunden ist, als Territorium zur Verfügung steht, zu berechnen.
Die Idee der Aufage entstand im Rahmen des Comenius Projektes. Ein internationales Mathematikprojekt, an dem unsere Schule schon seit zwei Jahren teilnimmt.
Durch diese Aufgabe werden wir uns in das Programm Mathematica einarbeiten, um dies somit für zukünftige mathematische Zwecke effizienter nutzen zu können.

2 Die Integralrechnung:

Drucken Öffnen / Schließen

Integralrechnung:

Öffnen / Schließen

Mit Hilfe der Integralrechnung wird versucht der Inhalt einer krummlinig begrenzten Fläche zu ermitteln (zu Integrieren). Zum Beispiel kann man mit der Integralrechnung eine Fläche berechnen, die von der x-Achse und einem Funktionsgraphen begrenzt ist. Weitere Anwendungsmöglichkeiten der Integralrechnung sind: Rotationskörper, Berechnung von Schwerkörpern oder auch Drehmomente.
Es gibt dabei mehrere Möglichkeiten diese Integrale zu berechnen. Durch ein sehr zeitraubendes Verfahren werden bestimmte Integrale über den gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersumme in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] zu berechnet.

Numerische Integration:

Öffnen / Schließen

Numerische Integration kommt aus dem lateinischen und bedeutet soviel wie „zahlenmäßige Wiederherstellung eines Ganzen". Mit Hilfe der numerischen Integration wird eine Fläche berechnet, die zwischen einem Funktionsgraph und der x-Achse liegt. Allgemein wird diese Fläche in gleichgroße, parallel zur y-Achse liegendende Streifen unterteilt und zwar im Intervall von $[a, b]$. Als nächstes wird das Intervall in n Teile mit der gleichen Breite $h = \frac{b-a}{n};\ n \in \mathbb{N}$ unterteilt. Anschließend werden deren Flächen berechnet und miteinander addiert. Diese Summe der Flächen ergibt dann einen s.g. Näherungswert. Der Näherungswert bezeichnet den Wert, welcher der Flächenmaßzahl am nächsten kommt.

Integrationsverfahren: Rechteckverfahren :

Öffnen / Schließen

Mit dem Rechteckverfahren wird versucht eine Funktion f in einem Intervall [a,b] näherungsweise durch das Addieren von Rechteckflächen zu integrieren.
Das Intervall wird von a bis b in n Teilintervalle Δx, $i = 1, \ldots, n$, z.B. in n gleiche Teilintervalle Δx, so dass $n\,\Delta x = b - a$ aufgeteilt. Die Ordinaten in je zwei aufeinanderfolgenden Teilpunkten begrenzen einen Streifen der Breite Δx. Wählt man als Höhe einmal die kleinste (m), zum anderen aber die größte (M) Ordinate im betrachteten i-ten Teilintervall und ersetzt die Fläche des Streifens durch ein kleineres Rechteck von der Fläche Δxm oder ein größeres ΔxM, so ist die Summe $\sum \Delta x\, m$ kleiner als die gesuchte Fläche, die Summe $\sum \Delta x\, M$ aber größer. Diese werden als Untersumme und Obersumme bezeichnet.

3 Aufgabenstellung:

Drucken Öffnen / Schließen

Gegebene und gesuchte Elemente:

Öffnen / Schließen

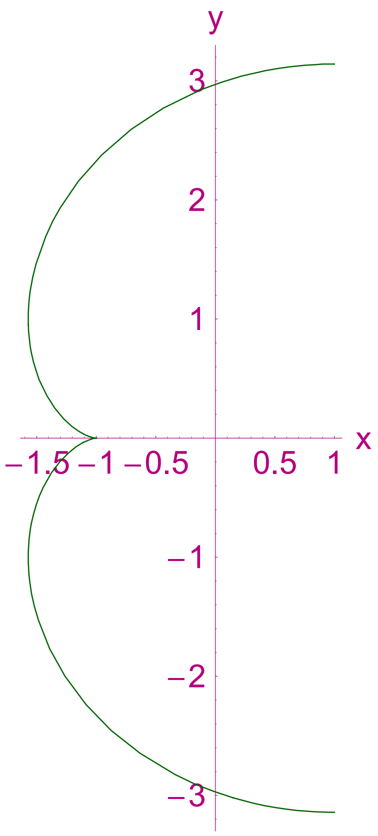
Zur Berechnung der Fläche, die die Ziege abgrasen soll, ist ein Turm mit dem Radius r=5cm und ein Seil mit der Länge R=π r gegeben.

Skizze der zu berechnenden Fläche:

Öffnen / Schließen

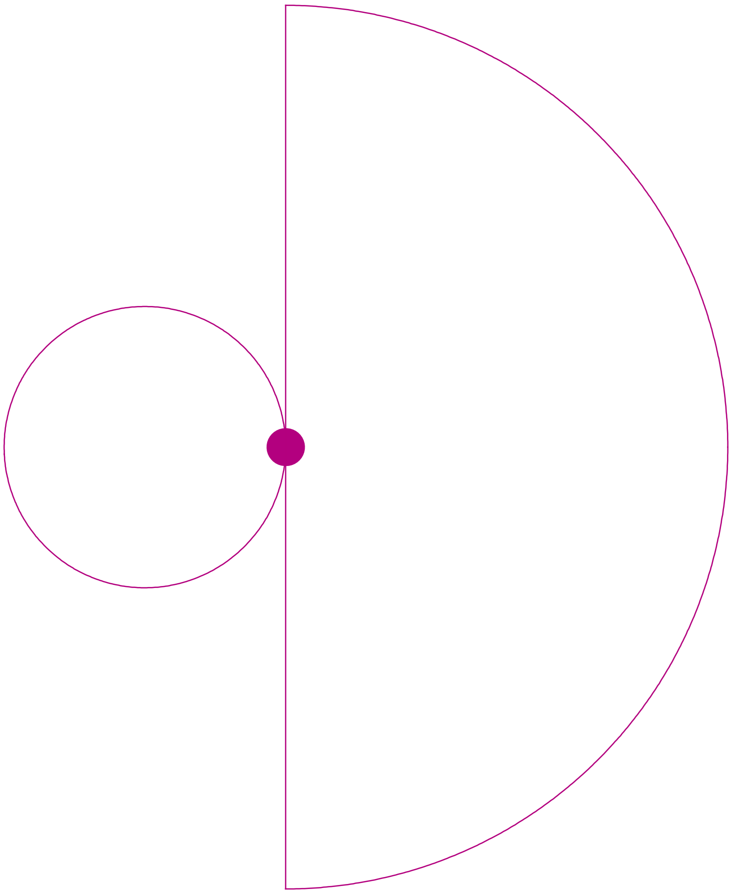
Input ▹
```
Clear[r, i, α, dα]; r = 1;
```

Input ▷
```
cardioide = ParametricPlot[
   {r (Cos[t] - (π - t) * Sin[t]), r (Sin[t] + (π - t) * Cos[t])},
   {t, 0, 2 π}, AspectRatio -> Automatic];
```

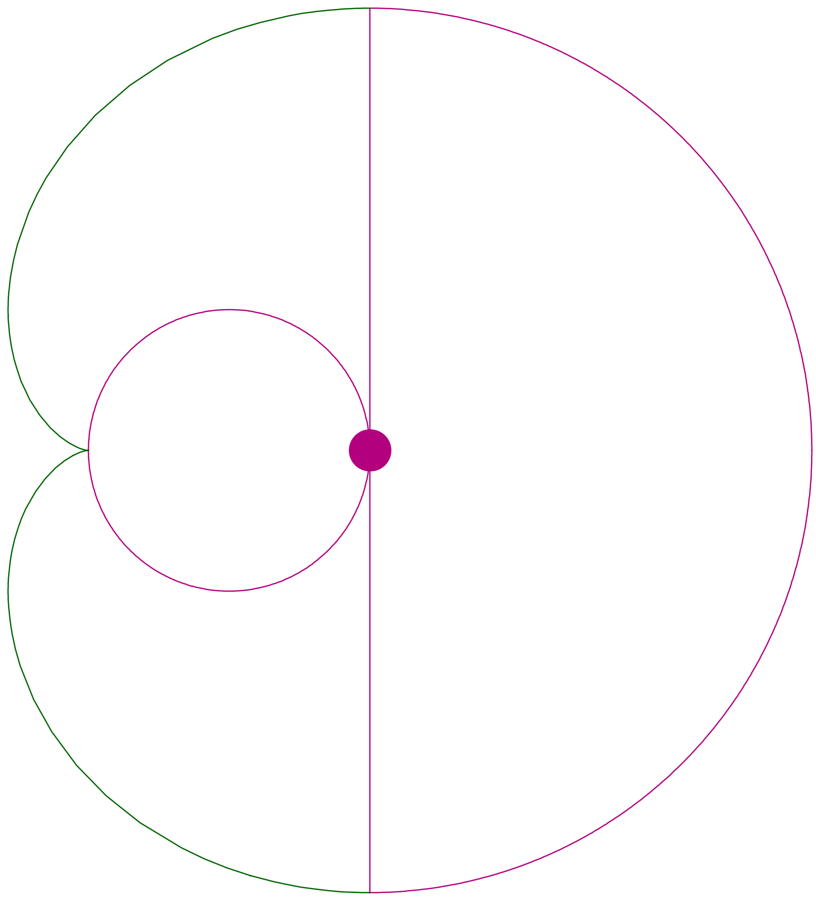


Input ▷
```
turm = Circle[{0, 0}, r];
pflock = {PointSize[0.05], Point[{1, 0}]};
linie = Line[{{1, r * π}, {1, -r * π}}];
halbkreis = Circle[{1, 0}, r * π, {-90 °, 90 °}];
```

Input ▷
```
u = Show[Graphics[{turm, pflock, linie, halbkreis}],
   AspectRatio -> Automatic];
```



Input ▷ `fläche = Show[u, cardioide];`



4 Berechnung der Fläche:

Drucken Öffnen / Schließen

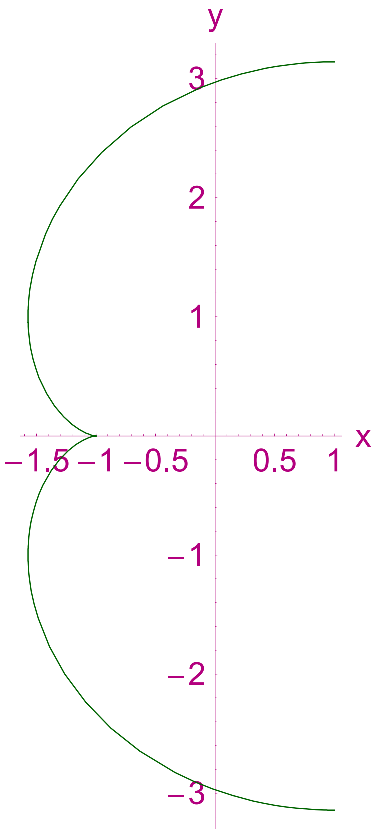
Flächenaufteilung:

Öffnen / Schließen

Zur leichteren Berechnung haben wir die Fläche in drei Teile geteilt:
Halbkreis = A_I und Kardioide = A_{II} und A_{III}.

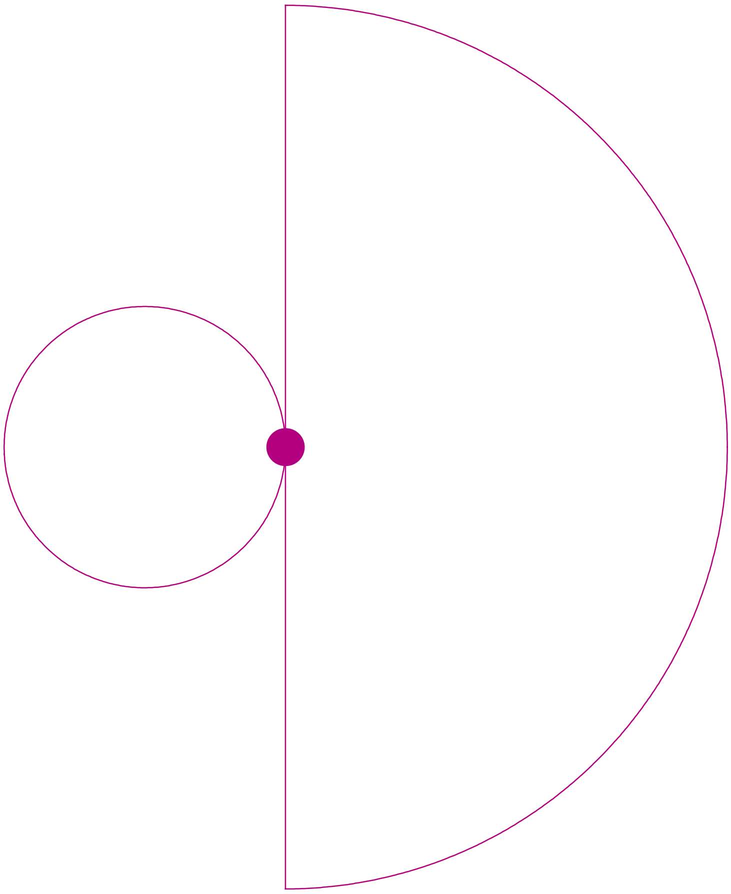
Input ▹
```
Clear[r, t]; r = 1;
```

Input ▹
```
cardioide = ParametricPlot[
    {r (Cos[t] - (π - t) * Sin[t]), r (Sin[t] + (π - t) * Cos[t])},
    {t, 0, 2 π}, AspectRatio -> Automatic];
```

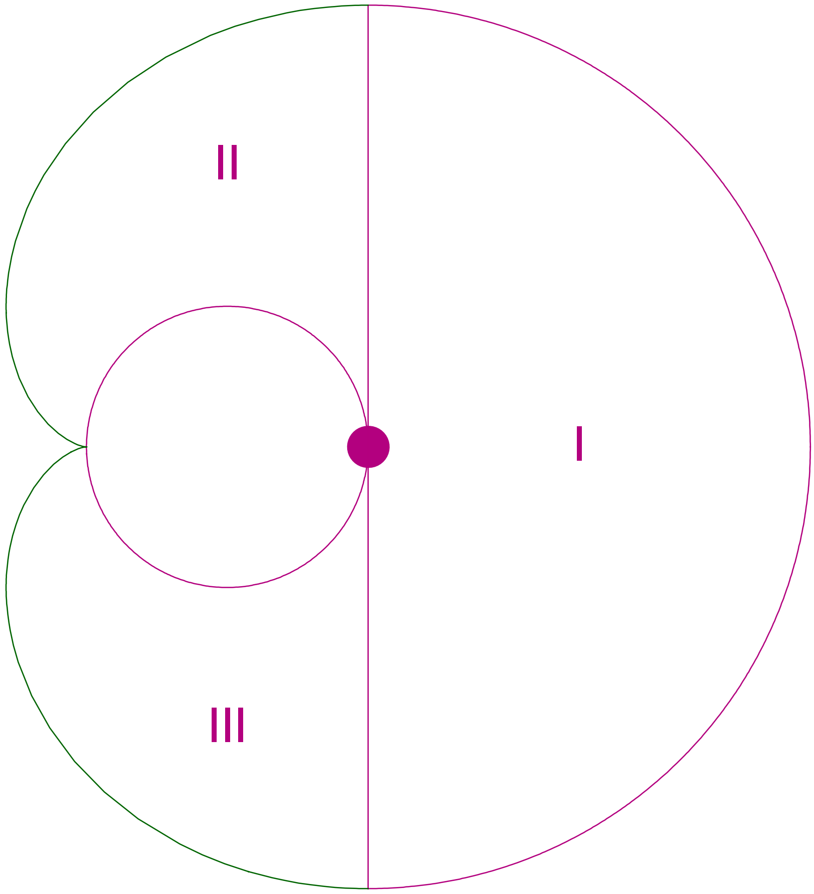


Input ▹
```
turm = Circle[{0, 0}, r];
pflock = {PointSize[0.05], Point[{1, 0}]};
linie = Line[{{1, r * π}, {1, -r * π}}];
halbkreis = Circle[{1, 0}, r * π, {-90 °, 90 °}];
```

Input ▹
```
u = Show[Graphics[{turm, pflock, linie, halbkreis}],
   AspectRatio -> Automatic];
```



Input ▷
```
fläche = Show[u, cardioide, Epilog -> {Text["I", {2.5, 0}],
    Text["III", {0, -2}], Text["II", {0, 2}]}];
```



Fläche des Halbkreises:

Öffnen / Schließen

Der Radius des Halbkreises ist gleich der Länge des Seiles R= π r.

$$A_i = \frac{\pi R^2}{2} == \frac{\pi \pi r^2}{2} == \frac{\pi^3 r^2}{2}$$

Fläche der Kardioide:

Öffnen / Schließen

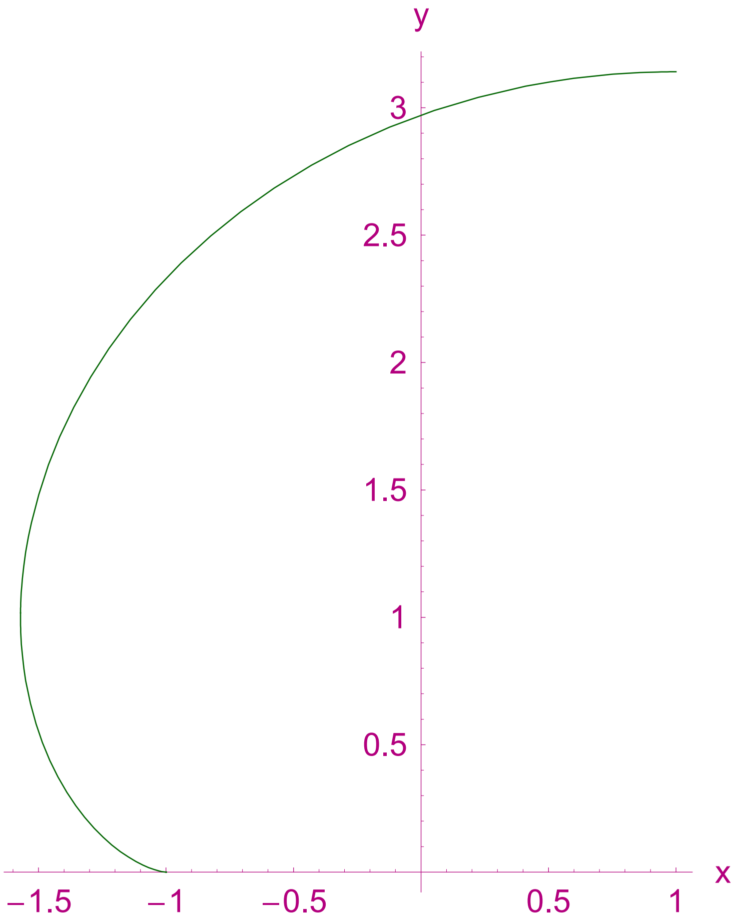
Wie schon im Rechteckverfahren vorgestellt kann man die Fläche der Cardioide mit Hilfe der Obersumme berechnen. Da wir die Fläche aber nicht bezüglich der x-Achse berechnen, so wie es im Rechteckverfahren angewendet wird, sondern bezüglich eines Kreises, in unserem Fall dem Turm, benutzen wir Dreiecke zur Bestimmung der Fläche.

Ansatz:

Öffnen / Schließen

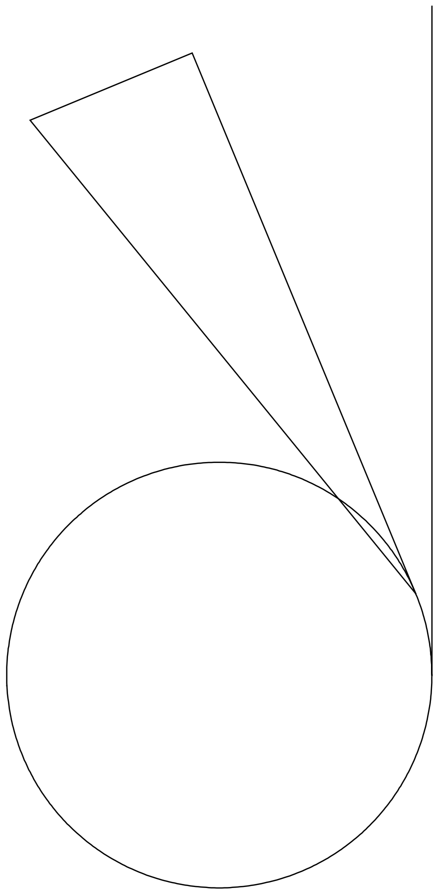
Input ▷
```
Clear[r, t]; r = 1;
```

Input ▹
```
cardioide = ParametricPlot[
    {r (Cos[t] - (π - t) * Sin[t]), r (Sin[t] + (π - t) * Cos[t])},
    {t, 0, π}, AspectRatio -> Automatic];
```

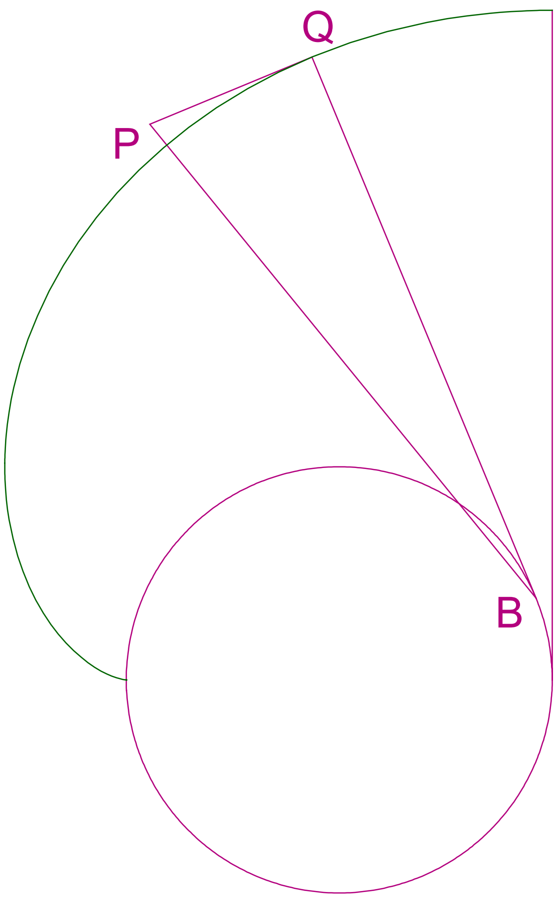


Input ▹
```
turm = Circle[{0, 0}, r];
linie = Line[{{1, r * π}, {1, 0}}];
α = π/8;
b = {Cos[α], Sin[α]};
p = {(Cos[α] - (π - α) Sin[α] - (π - α) Cos[α] * 0.3),
    (Sin[α] + (π - α) Cos[α] - (π - α) Sin[α] * 0.3)};
q = {(Cos[α] - (π - α) * Sin[α]), (Sin[α] + (π - α) * Cos[α])};
dreieck = Line[{b, p, q, b}];
```

Input ▹
```
u = Show[Graphics[{linie, turm, dreieck}],
    AspectRatio -> Automatic];
```



Input ▷
```
fläche = Show[u, cardioide,
  Epilog -> { Text["B", { 0.8, 0.3}], Text["P", {-1, 2.5}] ,
    Text["Q", { -0.1, 3.05}] }];
```



Fläche des Dreiecks BPQ:

$A_{II} = \frac{1}{2} t \overline{PQ}$

Länge des Seiles:

$l=\pi r=b+t$

Berechnung von b:

$\frac{b}{\alpha} = \frac{2 \pi r}{360°}$

$\frac{b}{\alpha} = \frac{\pi r}{180°}$

$b = \frac{\pi r \alpha}{\pi}$

$b = \alpha r$

Berechnung von t:

$\alpha r+t=\pi r$

$t=\pi r-\alpha r=r(\pi-\alpha)$

Berechnung von $\overline{PQ}$:

$$\frac{\overline{PQ}}{\Delta\alpha}=\frac{2\,\pi r}{360\,°}$$

$$\overline{PQ}=\frac{2\,\pi r*\Delta\alpha}{2\,\pi};\ r=t$$

$$\overline{PQ}=t\Delta\alpha=r\,(\pi-\alpha)\,\Delta\alpha$$

Flächenberechnung durch Obersumme:

Öffnen / Schließen

$$\alpha=\frac{\pi}{n}*i;\ d\alpha=\frac{\pi}{n}$$

$$A_{II}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\,t\,\overline{PQ}\right)$$

$$A_{II}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\,(\pi-\alpha[i])^2\,r^2\,\Delta\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\,r^2\sum_{i=1}^{n}\left(\pi-\frac{\pi}{n}*i\right)^2\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\pi^3}{n}\,r^2\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{2\,i}{n}+\frac{i^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\pi^3}{n}\,r^2\left(n-\frac{2}{n}\left(\frac{1}{2}\,n\,(n-1)\right)+\frac{1}{6\,n^2}\,(n\,(n+1)\,(2\,n+1))\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\pi^3\,r^2\left(1-\frac{n+1}{n}+\frac{1}{6}\,\frac{(n+1)\,(2\,n+1)}{n*n}\right)\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\frac{1}{2}\,\pi^3\,r^2\left(1-1+\frac{1}{6}*2\right)=\frac{\pi^3\,r^2}{6}$$

Flächenberechnung durch Integration:

Öffnen / Schließen

$$A_{II} = \int_0^\pi \frac{1}{2} (\pi - \alpha)^2 r^2 \, d\alpha$$
$$= \frac{1}{2} r^2 \int_0^\pi (\pi - \alpha)^2 \, d\alpha$$
$$= \frac{1}{2} r^2 \int_0^\pi (\pi^2 - 2\pi\alpha + \alpha^2) \, d\alpha$$
$$= \frac{1}{2} r^2 \left(\alpha\pi^2 - 2\alpha^2 \pi + \frac{\alpha^3}{3} \right) \Bigg|_0^\pi$$
$$= \frac{1}{2} r^2 \left(\pi^3 - \pi^3 + \frac{\pi^3}{3} \right)$$
$$= \frac{\pi^3}{6} r^2$$

Gesamte Fläche:

Öffnen / Schließen

$$A = A_I + 2 A_{II}$$
$$= \frac{\pi^3 r^2}{2} + 2 \frac{\pi^3}{6} r^2$$
$$= \frac{3\pi^3 r^2 + 2\pi^3 r^2}{6}$$
$$= \frac{5\pi^3 r^2}{6}$$

Nach beiden Verfahren ergibt sich für $r = 5$ cm die maximale Fläche $\approx 645,96$ cm².

5 Entstehung des Filmes:

Drucken Öffnen / Schließen

Ansatz:

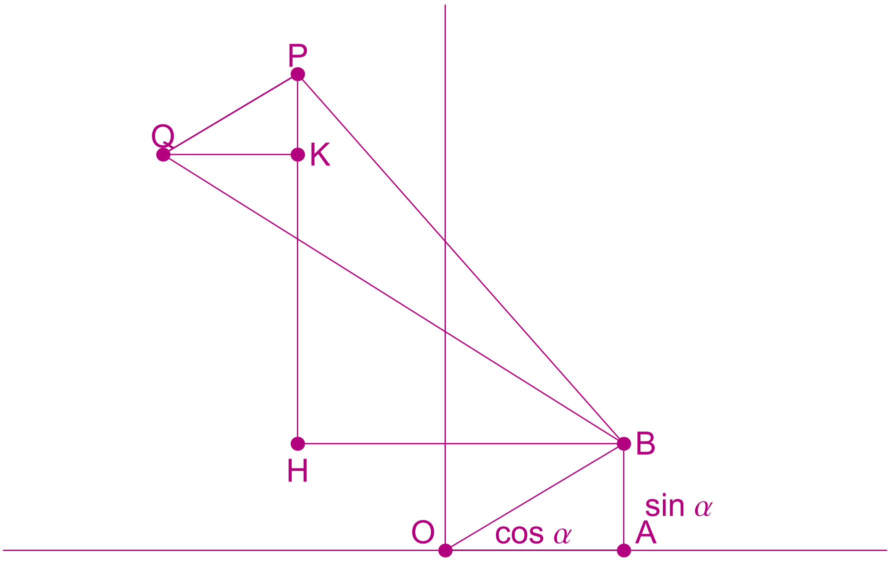
Öffnen / Schließen

Der Radius des Turmes wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf r = 1cm gesetzt.

```
Clear[α, n]
yachse = Line[{{0, 3}, {0, 0}}];
xachse = Line[{{2, 0}, {-2, 0}}];
α = π/n;
n = 5;
b = {Cos[α], Sin[α]};
a = {Cos[α], 0};
o = {0, 0};
dreieck = Line[{b, a, o, b}];
p = {(Cos[α] - (π - α) Sin[α] - (π - α) Cos[α] * 0.3),
    (Sin[α] + (π - α) Cos[α] - (π - α) Sin[α] * 0.3)};
q = {(Cos[α] - (π - α) * Sin[α]), (Sin[α] + (π - α) * Cos[α])};
dreieck2 = Line[{b, p, q, b}];
h = {(Cos[α] - (π - α) Sin[α]), Sin[α]};
verbindung = Line[{b, h}];
k = {(Cos[α] - (π - α) Sin[α]),
    (Sin[α] + (π - α) * Cos[α] - (π - α) Sin[α] * 0.3)};
verbindung2 = Line[{k, p, q, k}];
verbindung3 = Line[{h, k}];
```

Input ▷

```
u = Show[Graphics[{dreieck, dreieck2, xachse,
     yachse, verbindung, verbindung2, verbindung3}],
   Epilog -> { PointSize[0.015] , Point[{ Cos[α], Sin[α]}],
     Point[{ Cos[α], 0}], Point[{ 0, 0}],
     Point[{(Cos[α] - (π - α) Sin[α] - (π - α) Cos[α] * 0.3),
       (Sin[α] + (π - α) Cos[α] - (π - α) Sin[α] * 0.3)}],
     Point[{(Cos[α] - (π - α) * Sin[α]), (Sin[α] + (π - α) * Cos[α])}],
     Point[{ (Cos[α] - (π - α) Sin[α]), Sin[α]}],
     Point[{(Cos[α] - (π - α) Sin[α]),
       (Sin[α] + (π - α) * Cos[α] - (π - α) Sin[α] * 0.3)}],
     Text["B", { Cos[α] + 0.1, Sin[α] }],
     Text["K", { (Cos[α] - (π - α) Sin[α]) + 0.1,
       (Sin[α] + (π - α) * Cos[α] - (π - α) Sin[α] * 0.3) }],
     Text["Q", { (Cos[α] - (π - α) Sin[α] - (π - α) Cos[α] * 0.3),
       (Sin[α] + (π - α) Cos[α] - (π - α) Sin[α] * 0.3) + 0.1}], Text["P",
      {(Cos[α] - (π - α) * Sin[α]), (Sin[α] + (π - α) * Cos[α]) + 0.1}],
     Text["H", {(Cos[α] - (π - α) Sin[α]), Sin[α] - 0.15}],
     Text["A", {Cos[α] + 0.1, 0.1 }] , Text["O", { -0.1, 0.1}],
     Text["sin α", {Cos[α] + 0.25, 0.25}] ,
     Text["cos α", { 0.4, 0.1 }] }];
```



Berechnung von $\overline{\mathrm{PH}}$:

$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PB}}}$; mit $\overline{\mathrm{PB}} = t = \pi - \alpha$

$= \frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\pi - \alpha}$

$\overline{\mathrm{PH}} = (\pi - \alpha) * \cos\alpha$

Berechnung von $\overline{\mathrm{QK}}$:

$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{QK}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$; $\overline{\mathrm{PQ}} = (\pi - \alpha)\,\Delta\alpha$

$\overline{\mathrm{QK}} = (\pi - \alpha)\,\Delta\alpha * \cos\alpha$

Berechnung von $\overline{\mathrm{BH}}$:

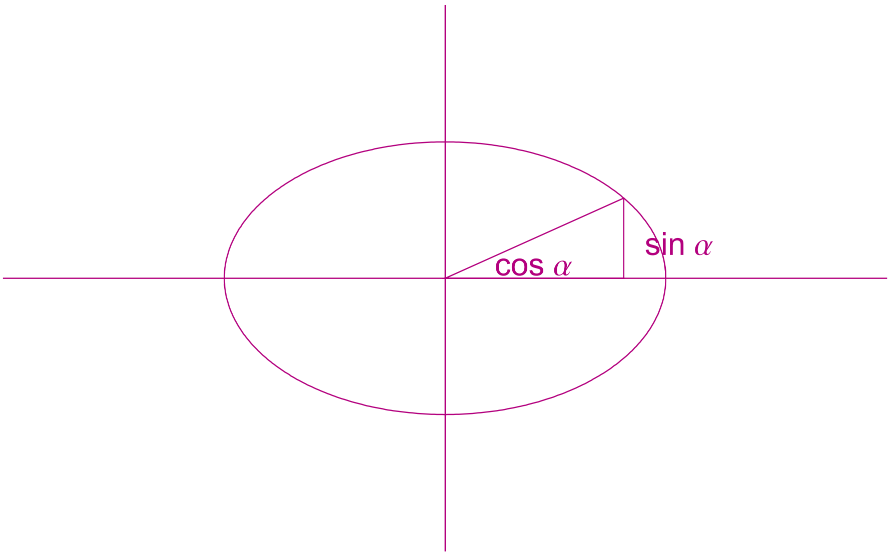
$\sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{PB}}}$

$\overline{\mathrm{PK}} = (\pi - \alpha)\,\Delta\alpha * \sin\alpha$

Koordinatenangabe:

Öffnen / Schließen

Input ▹
```
(*Punkt b Berührpunkt auf dem Kreis*)
kreis = Circle[{0, 0}, 1];
yachse = Line[{{0, 2}, {0, -2}}];
xachse = Line[{{2, 0}, {-2, 0}}];
b = {Cos[α], Sin[α]};
α = π/5;
a = {Cos[α], 0};
o = {0, 0};
dreieck = Line[{b, a, o, b}];
u = Show[Graphics[{kreis, xachse, yachse, dreieck}],
   Epilog -> { Text["sin α", {Cos[α] + 0.25, 0.25}] ,
     Text["cos α", { 0.4, 0.1 }] }];
```



b (cosα | sinα)

Punkt p (Schnittpunkt der Tangente mit der Kardioide):

x – Koordinate = $\overline{AO} - \overline{BH}$

=cosα-(π-α)*sinα

y – Koordinate = $\overline{AB} + \overline{PH}$

=sinα+(π-α)*cosα

p(cosα-(π-α)*sinα | sinα+(π-α)* cosα)

Punkt q (Endpunkt des Stückes der Tangente an die Kardioide):

x – Koordinate = $\overline{AO} - \overline{BH} - \overline{QK}$

=cosα-(π-α)* sinα-(π-α)$\Delta\alpha$*cosα

y – Koordinate = $\overline{AB} + \overline{PH} - \overline{PK}$

=sinα+(π-α)* cosα-(π-α)$\Delta\alpha$*sinα

q(cosα-(π-α)* sinα-(π-α)$\Delta\alpha$* cosα | sinα+(π-α)* cosα-(π-α)$\Delta\alpha$*sinα)

Filmvorführung:

Öffnen / Schließen

```
Clear[r, t]; r = 1;
cardioide = ParametricPlot[
   {r (Cos[t] - (π - t) * Sin[t]), r (Sin[t] + (π - t) * Cos[t])},
   {t, 0, 2 π}, AspectRatio -> Automatic,
   DisplayFunction → Identity];
```

Input ▷

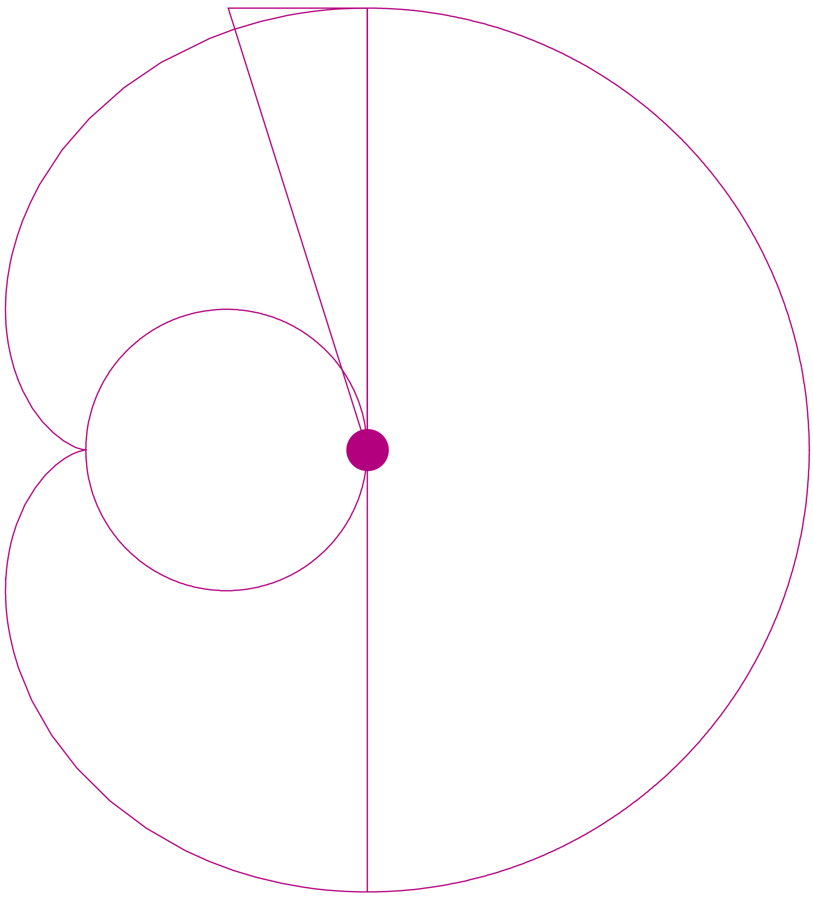
```
turm = Circle[{0, 0}, r];
pflock = {PointSize[0.05], Point[{1, 0}]};
linie = Line[{{1, r * π}, {1, -r * π}}];
halbkreis = Circle[{1, 0}, r * π, {-90 °, 90 °}];
u = Show[Graphics[{turm, pflock, linie, halbkreis}],
   AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction → Identity];

fläche = Show[u, cardioide, DisplayFunction → Identity];
```

Input ▷

```
Clear[i, n, b, p, q]
n = 10;
b = {r * Cos[π/n * i], r * Sin[π/n * i]};
p =
  {r (Cos[π/n * i] - (π - π/n * i) Sin[π/n * i] - (π - π/n * i) Cos[π/n * i] * π/n),
   r (Sin[π/n * i] + (π - π/n * i) Cos[π/n * i] -
      (π - π/n * i) Sin[π/n * i] * π/n)};
q = {r (Cos[π/n * i] - (π - π/n * i) * Sin[π/n * i]),
   r (Sin[π/n * i] + (π - π/n * i) * Cos[π/n * i])};
```

```
MDMovie[ Show[fläche, Graphics[Line[{b, p, q, b}]],
  AspectRatio -> Automatic], {i, 0, n, 0.05}];
```



Start ▷ Stop ■ Delete × Print

Neues Kapitel Kapitel löschen

INTERNET W3 Drucken Öffnen / Schließen

Erzeuge deinen eigenen surfing GUIDE für Mathematik!